Exercice 1 (1) cours, (2): non, les fonctions constantes ne la satisfont évidemment pas. (3): voir les détais sur la feuille de TD no 4.

Exercice 2 (1) la norme est 1 pour tout n. (2) Soit $I_n = (2^{-n-1}, 2^{-n})$. Pour tester $f \in H^1(\Omega)$ on considère la dérivée distributionnelle dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Soit donc $K \subset \Omega$ compact et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Or $\varphi(2^{-n}) = 0$ pour tout n,

$$\int_{I_n} u_n \varphi' = \int_{I_n} \varphi' = \varphi(2^{-n}) - \varphi(2^{-n-1}) = 0 - 0 = 0.$$

Donc $u_n' = 0$ pour tout n. (3) Soit $f \in H^1(\Omega)$. Or $u_n' = 0$ (dérivée faible) , $(u_n, f)_{H^1} = \int_\Omega u_n f$. Par Cauchy-Schwarz, $|(u_n, f)_{H^1}| \leq \|f\|_{L_2(I_n)}$ qui tend vers zéro. Ainsi, u_n tend faiblement vers zéro. (4) si elle était compacte, elle transformerait la convergence faible en convergence en norme, c'est-à-dire: $u_n \to 0$ en norme $L_2(\Omega)$ ce qui est absurde car $\|u_n\|_2 = 1$.

Exercice 3 C'est un classique, voir la dernière feuille de TD distribution 2010/2011 pour des détails.