Université de Bordeaux
Master 1, EDP1.

Examen
(durée 3h, documents non autorisés)

Exercice 1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-|x|}$.
1) Calculer la transformée de Fourier de f.
2) En déduire la transformée de Fourier de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
3) Calculer le produit de convolution $f \star f$.
4) En déduire la transformée de Fourier de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. On considère le problème suivant:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + a.\nabla u(t,x) = 0, \;\; u(0,x) = f(x) \qquad (P)$$

où la donnée initiale f est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.
1) Quelle équation (P_0) obtient-on en prenant la transformée de Fourier par rapport à la variable espace ?
2) Résoudre (P_0) puis donner l'expression de la solution de (P) (justifier toutes les étapes).

Exercice 3. Soit $0 \leq m \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et on définit l'espace

$$V = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^2 dx < \infty\}.$$

1) Montrer que V, muni de la norme

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^2 dx\right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert qui s'injecte de façon continue dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
On définit la forme bilinéaire $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{R}$ par:

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u.\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} muv dx.$$

2) Montrer que $\mathfrak{a}$ est continue et quasi-coercive.
3) Quel problème variationnel peut-on alors résoudre en utilisant la forme $\mathfrak{a}$?
4) Soit $\lambda > 0$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Expliquer pourquoi il existe u dans un sous-espace de V tel que

$$\lambda u + (-\Delta + m)u = f \text{ et que } \|u\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{\lambda}.$$

Dans la suite, on suppose que $m(x) \to +\infty$ lorsque $|x| \to \infty$ (cela veut dire que pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que $m(x) > M$ p.p. $x \in \mathbb{R}^N \setminus B(0,R)$).

Soit (f_k) une suite qui converge faiblement dans V vers 0.

5) Soit $R > 0$. Montrer que la restriction de (f_k) à la boule $B(0,R)$ converge faiblement vers 0 dans $H^1(B(0,R))$ (indication : on pourra utiliser l'opérateur de restriction $\mathcal{R} : V \to H^1(B(0,R))$, $u \mapsto u_{|B(0,R)}$).
6) Rappeler le théorème de compacité de Rellich.
7) Expliquer pourquoi la restriction de (f_k) à la boule $B(0,R)$ converge vers 0 pour la norme de $L^2(B(0,R))$.
8) En utilisant le fait que toute suite qui converge faiblement est bornée, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe R tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} |f_k|^2 dx \leq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

9) En déduire que (f_k) converge en norme vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
10) Que peut-on dire de l'injection de V dans $L^2(\mathbb{R}^N)$?