Exercice 1

a) Soit $I = (-1, 1)$, montrer que la fonction

$$u \ : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+|x|}{2} \end{cases}$$

appartient à $H^1(I)$ et déterminer sa dérivée. Cette fonction est-elle dans $H^2(I)$?

b) Montrer que toute fonction continue sur $\bar{I}$ et continument dérivable par morceaux sur $\bar{I}$ est une fonction de $H^1(I)$.

Exercice 2

a) Soit $f \in H^1(I)$, I étant un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \frac{1}{|I|}\int_I f dx$.

b) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f - f(c)\|_{L_2(I)} \leq C\|f'\|_{L_2(I)}$.

c) Etendre la preuve à un un convexe borné Ω de $\mathbb{R}^n$: il existe un $C > 0$, dépendant de Ω tel que, pour $f \in H^1(\Omega)$

$$\left\| f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f dx \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left\| \nabla f \right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Exercice 3*

a) Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in K(X, Y)$. Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge (en norme) vers Tx.

b) Soit Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^1(\Omega)$,

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|f - \alpha\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Indication: effectuer un raisonnement par l'absurde : si l'inégalité est fausse, il existe une suite de fonctions f_n de norme $\|f_n\|_{H^1} = 1$ tel que pour tout n et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|f_n - \alpha\|_{L_2} > n\|\nabla f_n\|. \qquad (*)$$

Utiliser (a) pour montrer qu'il existe une sous-suite extraite $(f_{\sigma(n)})$ qui converge dans L_2. Utiliser $(*)$ pour déduire que $(\nabla f_{\sigma(n)})$ est Cauchy dans $L_2(\Omega)$. Trouver une contradiction, en choisissant $\alpha_n = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f_n dx$.

Exercice 4 Soit H un espace de Hilbert et $B : H \times H \to \mathbb{R}$ une application sesquilinéaire satisfaisant $B(x, y) \leq M\|x\|\|y\|$ et $\mathrm{Re}B(x, x) \geq m\|x\|^2$.

a) Montrer que pour tout $u \in H$ il existe $w \in H$ tel qu'on ait pour tout $v \in H$ $B(v, u) = \langle v|w \rangle_H$.

b) Soit $Au := w$. Montrer que A est linéaire, puis considérer $\|Au\|^2 = B(Au, u)$ pour montrer que A est continu.

c) Utilisez $\mathrm{Re}B(x,x) \geq m\|x\|^2$ pour montrer que $\|Au\| \geq m\|u\|$. En déduire que A est injectif et à image fermé (indication: utilisez la complétude de H).
d) Montrer que l'image de A est dense : supposons existe un $w \perp \mathrm{Image}(A)$.Montrez que $w = 0$.
e) Ainsi, A est linéaire, continu, bijectif. Montrer que $A^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.
f) Soit $L : H \to \mathbb{R}$ linéaire et continu. Montrer qu'il existe $u \in H$ tel qu'on a égalié entre les applications $v \mapsto B(u,v)$ et L.

Exercice 5 On veut résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R})$. Une solution classique est une solution $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant (1). On dira que $u \in H^1(\mathbb{R})$ est une solution faible de (1) si

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}) : \qquad \int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv.$$

a) Soit $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$ et

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 2. \end{cases}$$

On définit la suite $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k})$. Montrer que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\eta_k g \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
b) Soit u une solution classique de (1). Multiplier l'équation différentielle par η_k et intégrer pour montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer ensuite que u est aussi une solution faible de (1).
c) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible à (1).
d) On suppose que f est continue. Montrer alors que la solution faible de (1) est dans $C^2(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 6 Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, on pose :

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \left(\int_{\Omega} u\right)\left(\int_{\Omega} v\right).$$

a) Montrer que a est bilinéaire, continue et elliptique sur $H^1(\Omega)$.
b) Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe un et un seul u solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \;\; a(u,v) = \int_{\Omega} fv.$$

Montrer qu'alors $\int_{\Omega} u = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} f$.
c) Dans le cas où $\int_{\Omega} f = 0$, quelle est l'EDP vérifiée par u ?