Bonjour. $f_n \to f$ p.p.

et (f_n) borné sur les compacts

$\int f_n \cdot \varphi \xrightarrow[\text{domin.}]{\text{conv.}} \int f \cdot \varphi$

L'exemple de $\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k$ est de ce type.

Dirichlet

$$D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^{N} e^{ikt}.$$

apparaissent nat. dans la quest. de conv. de séries de Fourier;

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$S_n(f,t) := \sum_{-n}^{n} c_n\, e^{+int}.$$

$\underline{Q}$: $S_n \xrightarrow{n\to\infty} f$? dans quel sens?

$$S_n(f,t) = \sum_{-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ins} f(s)\, ds\right) e^{+int}$$

$$= (\underline{\underline{D_n}} * f)(t).$$

$\underline{t \notin 2\pi\mathbb{Z}}$:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n} e^{-int}\cdot\left(e^{it}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-int}\,\frac{1-e^{it(2n+1)}}{1-e^{it}}.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\underbrace{e^{-int}}\cdot\frac{e^{-it\left(\frac{2n+1}{2}\right)} - e^{it\left(\frac{2n+1}{2}\right)}}{e^{-it/2} - e^{it/2}}\cdot\frac{e^{it\left(\frac{2n+1}{2}\right)}}{\underbrace{e^{it/2}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\cdot t\right)}{\sin(t/2)}$$

$t \in 2\pi\mathbb{Z}$: $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\underbrace{e^{ikt}}_{=1} = (2n+1)\cdot\frac{1}{2\pi}$

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\cdot(2n+1) & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin(t/2)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si on fixe t, est-ce qu'on a conv. lorsque $n \to \infty$?

Cas 1 : $t \in \pi\cdot\mathbb{Q}$

Cas 2 : $t \notin \pi\mathbb{Q}$

$\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}\cdot t\right)\right)_{n\geq 1}$ est dense dans $[-1,1]$, car $\{\sin(k\pi x) : k \in \mathbb{N}\}$ dense pour $x \notin \mathbb{Q}$.

Revient à montrer que $(k\cdot x \bmod 1)_{k\geq 0}$ est une suite dense.

- une preuve passe par les ss-grp. de $\mathbb{R}_+$:

- Weyl (1910) : $x_k = (k x) \bmod 1$

on regarde pour $0 \leq a < b \leq 1$

Si $\frac{\#\{0\leq k \leq n : a \leq x_k \leq b\}}{n} \longrightarrow (b-a)$

on appelle (x_k) équiréparti dans $[0,1]$.

Maintenant (Weyl) ceci se caractérise par

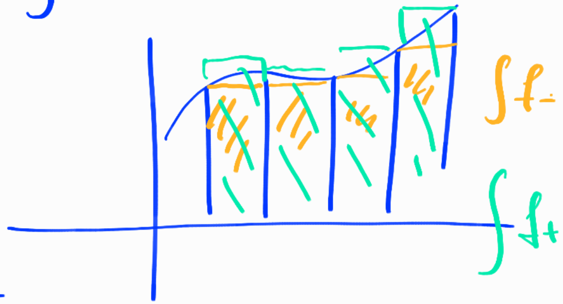
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$

pour toute fonct. R-intégrable sur $[0,1]$.

Raison : pour $\varepsilon > 0$ il ex. f_-, f_+ en escalier (commun) avec

$$\int f_- \geq \int f - \varepsilon \quad \text{et}$$

$\int f_+ \leq \int f + \varepsilon$



$\left| \int f_+ - \int f_- \right| \leq 2\varepsilon$

Pour $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{\#\{k \leq n : a \leq x_k \leq b\}}{n}$$

$$\longrightarrow (b-a) = \int f$$

Vrai pour $\mathbb{1}_{[a,b]}$ $\forall\, a<b$

$\Rightarrow$ Vrai pour f_+, f_-

$\rightsquigarrow$ Vrai pour f.

2ième idée de Weyl : f unif.t cont sur $[0,1]$ $\Rightarrow$ f est uniformément

approchables par des fonctions trigo. (Explicitement : théorème de Fejer)

$$\int_0^1 e^{2\pi i m t}\, dt = 0 \quad \forall m \neq 0$$

(et 1 pour $m=0$)

ainsi $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m \cdot x_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall m \neq 0.$

donc
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m \cdot x_k} = o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

caractérise équidistrib. Pour $x_k = \alpha \cdot k$ mod 1 la somme à gauche se calc. à la main, et vérifie le critère de Weyl.

Résultat : $(\sin(k\pi\alpha))_{k\geq 1}$ diverge.

De la même façon, $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\alpha\right)$ diverge.

L'approche par cv. dominé est verrouillé ici, car nous avons div. sur un ensemble de mesure 1.

<u>Montrer</u> $T_n = T_{D_n} \xrightarrow{n\to\infty} T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} D_n(t)\,\varphi(t)\,dt$$

OR $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ il ∃. $M \in \mathbb{N}^*$ avec $\operatorname{supp}(\varphi) = [-2\pi M, 2\pi M]$.

$$= \int_{-2\pi M}^{2\pi M} D_n(t)\,\varphi(t)\,dt$$

$-M\cdot 2\pi$ 0 $M\cdot 2\pi$

$$= \sum_{k=-M}^{M-1} \int_0^{2\pi} D_n(2\pi k+t)\,\varphi(2\pi k+t)\,dt$$

Rappel $D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} e^{ikt}$ est <u>2π-périod.</u>

$$= \int_0^{2\pi} D_n(t) \underbrace{\left(\sum_{-M}^{M+1} \varphi(2\pi\ell+t)\right)}_{=\psi(t)} dt$$

Q: $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} D_n(t)\,\psi(t)\,dt}$ = ?

$(D_n(s) = D_n(-s))$ $\underbrace{\int_0^{2\pi} D_n(0-s)\,\psi(s)\,ds}_{= S_n(\psi,0)}$

OR $\psi \in \mathcal{C}^2$, on a $S_n(\psi,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(t)$ $\forall t$.

$$S_n(\psi,t) = \sum_{-n}^{n} c_k\, e^{+ikt}$$

$c_k \le \frac{1}{k^2+1}$ par IPP.

mais alors S_n cv. <u>normalement</u> donc unif^t et abs^t.

$S_n(\varphi, t) \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ continue qui a les mêmes coeff's de F. que φ !

Ainsi, $\langle D_n, \varphi\rangle = S_n(\varphi, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0)$

$$= \sum_{-n}^{n+1} \varphi(2\pi k + 0)$$

$(\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-2\pi n, 2\pi n]) = \sum_{\mathbb{Z}} \varphi(2\pi k).$

$$D_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}.$$

alors que, ponctuellement, $(D_n(t))_{n\geq 0}$ diverge p.p.

$\underline{D_n'} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta'_{2\pi k}$

(on peut aussi montrer $\langle D_n, \varphi\rangle \to \varphi(0)$ en écrivant $\varphi(t) = \varphi(0) + t \cdot h(t)$, on y arrive "à la main". $\left(h(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi'(s)\right)$

L'idée est que $|h| \leq \|\varphi'\|_\infty$ et que le facteur t "tue" le $\frac{1}{\sin(t/2)}$ du $D_n(t)$. Le sinus des "hautes fréquences" $\sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)$ se traite par Riemann-Lebesgue.)

$\underline{\text{R-L}}$: $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}_0$

$\underline{\text{dém.}}$ $\underline{\text{dès}}$. $\widehat{\mathbb{1}_{[a,b]}} \in \mathcal{C}_0$.

$\Rightarrow \mathcal{F}(\text{fonct. escalier}) \subseteq \mathcal{C}_0$

① $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in L^\infty$.

② $\mathcal{F}\left(\overline{\text{fonc. en escalier}}^{L^1}\right) \subseteq \overline{\mathcal{C}_0}^{L^\infty}$

$= \mathcal{C}_0$ (sev. fermé)

Def. $T_n \longrightarrow T$ si

$\forall \varphi : \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2^{-n}}_{\text{"engendre" la conv.}} \underbrace{\frac{|f(x_n)-g(x_n)|}{1+|f(x_n)-g(x_n)|}}_{\leq 1}$$

avec (x_n) dense

Alors $f_n \xrightarrow{d} f$ ssi

$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x$.

Une preuve que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est non-métrisable passe par ex. par la non-validité du th. de Baire dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Questions / réponses.

- $C^k(\bar{\Omega}) = \{ f \in C^k(\Omega) : \forall x^* \in \partial\Omega, \lim_{\substack{x \to x^* \\ x \in \Omega}} (\partial_\alpha f(x))$ existe, pour $|\alpha| \leq k \}$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$$

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\bar{\Omega}).$$

$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\varphi)$ comp. de $\Omega \}$

$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K \}$

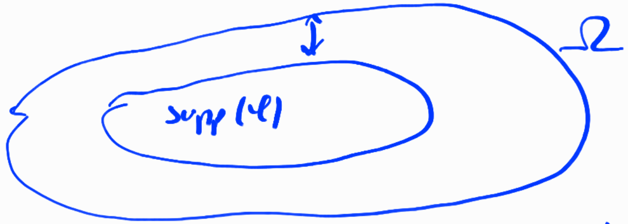
(K comp. de Ω)

$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{ f|_{\bar{\Omega}} : f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \}$

(Ω borné:) $= C^\infty(\bar{\Omega})$

Thm: $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dense dans $H^m(\Omega)$.

"ouvert, très régulier".



$\mathbb{1}_{\overline{\Omega}} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ pour Ω borné:

on prend η plateau sur $B(0,R)$,

constant à 1 sur $B(0, \frac{R}{2})$. R grand

$B(0, \frac{R}{2}) \supseteq \overline{\Omega}$.

$$\eta\big|_{\overline{\Omega}} \equiv 1.$$

$f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$

$$\xi \hat{f}(\xi) = -i \widehat{f'}.$$

(cours "Sobolev" minute 10-12)

$$\langle \widehat{\partial_x f}, \hat{\varphi} \rangle \qquad \varphi \in \mathcal{D}.$$

$= c\langle \partial_x f, \varphi \rangle$ Plancherel

$= c \langle f, (\partial_x \varphi) \rangle$ Plancherel

$= \langle \hat{f}, \widehat{\partial_x \varphi} \rangle$
