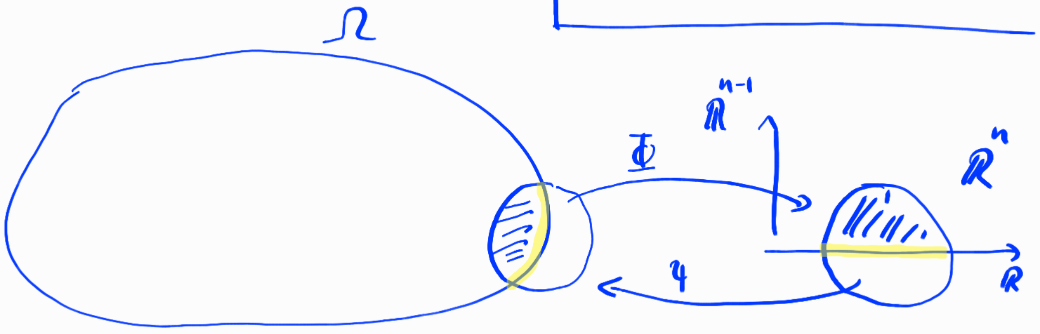
Questions ?

Planning :
- il reste 1 cours (enregistré cet après-midi).
- il reste 2 TD.
- EX : 17/12. 14h30.

Domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Que signifie la régularité du bord ?



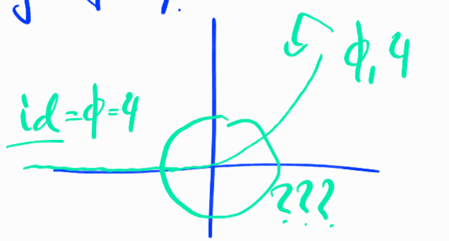
- Φ, ψ bij., $\Phi^{-1} = \psi$.
- Φ et ψ doivent être
  - Lipschitz $\|\Phi(x)-\Phi(y)\| \le L\|x-y\|$
  - C^1 ← cours pour les preuves.
  - C^∞
  - etc.

$$\Phi(\psi(s,t)) = \Phi(s, t+s^2) = (s, t+s^2-s^2) = (s,t) \checkmark$$

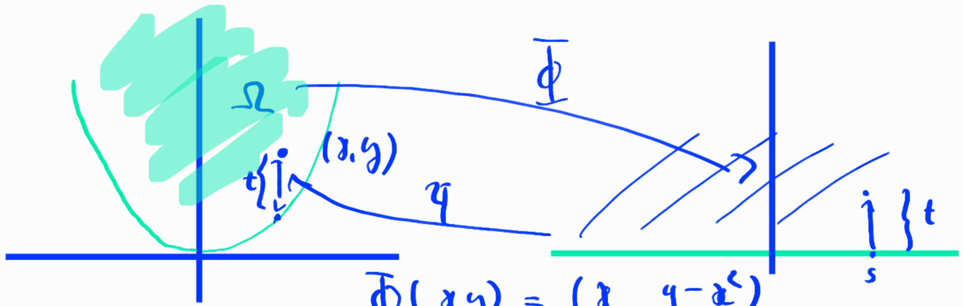
$$\psi(\Phi(x,y)) = \psi(x, y-x^2) = (x, y-x^2+x^2) = (x,y) \checkmark$$

Φ, ψ sont C^∞ car polynomials → "Ω est de classe C^∞"

Questions pour "jouer un peu" : $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ et $\Omega = \{(x,y) : y > f(x)\}$.



Ex. $\Omega = \{(x,y) : y > x^2\}$



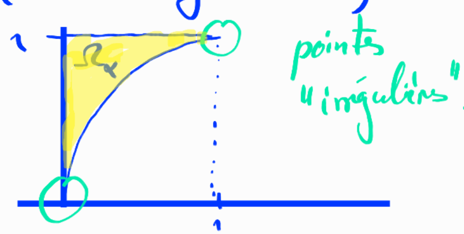
$$\Phi(x,y) = (x, y-x^2).$$
$$\psi(s,t) = (s, t+s^2)$$

Ex On fixe $\alpha \in (0,1)$.

$Q = (0,1) \times (0,1)$

$\Omega_\alpha = \{(x,y) \in Q : y > x^\alpha\}$

① dessin ?



② $u(x,y) = y^{-\beta}$. $(1 < p < \infty)$

Mq $u \in W^{1,p}(\Omega_\alpha)$

ssi $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) > p(1+\beta)$

$\left[W^{1,p} = \{ f \in L^p : f' \text{ (au sens } \mathcal{D}') \in L^p \}\right.$

càd: $f \in L^p$, $(T_f)' = T_g$ avec $g \in L^p$ $\Big]$

a) $$\int_{\Omega_\alpha} |u(x,y)|^p \, d(x,y) = \int_0^1 \int_{x^\alpha}^1 y^{-\beta p} \, dy dx$$

$(\beta p \neq 1)$ $$= c \int_0^1 \left[y^{-\beta p+1} \right]_{y=x^\alpha}^{y=1} dx$$

$$= c \int_0^1 1 - x^{\alpha(1-\beta p)} \, dx$$

intégrale finie ssi $x^{\alpha(1-\beta p)} \in L^1(0,1)$

càd $$\boxed{\alpha(1-\beta p) > -1 \qquad (*)}$$

ceci caracterise $u \in L^p(\Omega_\alpha)$.

ⓑ $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\beta \cdot y^{-\beta-1}$

$\|\nabla u\|_2 = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \beta \cdot y^{-\beta-1}$.

$\in L^p(\Omega_\alpha)$ ssi (par $*$):

$$\alpha\left(1-(1+\beta)p\right) > -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-(1+\beta)p > -\frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\frac{1}{\alpha} > (1+\beta)p.$$

tandis que $(*) \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\alpha} > \beta p$.

(dim = 2) Soit $p > 2$ et β suff.t petit pour que

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}_{>2} > (1+\beta) \cdot p \qquad (**)$$

pour $p \in \left(2, 1+\frac{1}{\alpha}\right)$ il ex. $\beta > 0$ qui satisfait $(**)$. (ici, $p \geq 2$ est OK)

Q: Est-ce qu'on peut étendre u à $W^{1,p}(Q)$? $\left[u(x,y) = y^{-\beta} \right]$

en dim 2, $\boxed{W^{1,p}(\Omega) \subseteq C^{\alpha}(\Omega)}$
pour Ω "régulier" et borné pour
$\alpha = 1 - \frac{2}{p}$ ← ici on veut $p > 2$!

brouillon

Ω borné et "Lipschitz".

$-\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{r+\alpha}{2}$

$\iff 1 - \frac{2}{p} = r + \alpha$

p proche de 2, $r = 0$.

$\rightsquigarrow \boxed{\alpha = 1 - \frac{2}{p}}$

Si $\tilde{u}$ est une extension de u,
$\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{u}|_{\Omega_\alpha} = u$

Alors $\tilde{u}$ borné par Sobolev.
Ici, on utilise $p \cdot \frac{k}{1} > \dim = 2$.

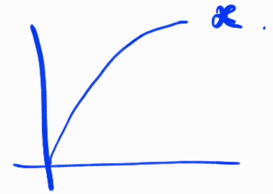
Mais évidemment,

$\lim \tilde{u}(n^{-1}, 2 \cdot n^{-\alpha}) \longrightarrow +\infty$

il n'y a pas d'extension possible!

Par conséquent Ω_α n'est pas "assez régulier" pour le thm. d'extension.

En effet, la "pointe" pose pb:



$f(x) = x^{\alpha}$

$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

Soit $L > 0$. Il ex. $\varepsilon > 0$: $\alpha \cdot \varepsilon^{\alpha-1} > L$.
$\alpha - 1 < 0$.

$\Rightarrow \forall\, x, y \in [0, \varepsilon]$:

$|f(x) - f(y)| = \underbrace{|f'(\xi)|} \cdot |x - y|$

$= \alpha\, \xi^{\alpha - 1} \geq \alpha \cdot \varepsilon^{\alpha-1} > L$

montre que Ω_α non-Lipschitz!

Curieux. Dans le cas "limit" $\alpha = 1$ cette construction s'échoue :

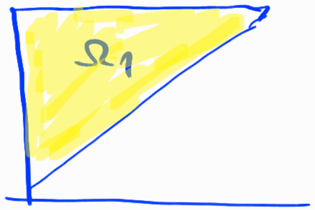
$$\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = (1+\beta)\cdot p$$

devient

$$2 = (1+\beta)\cdot p$$

et même pour $p = 2$ il n'y a pas de $\beta > 0$ qui satisfait cette equation.

Et en effet, Ω_1 $(\alpha=1)$ est Lipschitz !



Et sur un domaine Lipschitz Ω il ex. un op. d'extension

$$E : \begin{cases} W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \\ u \longmapsto E(u) \end{cases}$$

avec $\| Eu \|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \| u \|_{W^{m,p}(\Omega)}$!

Ex. (a) Rappeller le thm. de Rellich.

Ω borné de $\mathbb{R}^n$, $\boxed{\partial\Omega \ \mathcal{C}^1}$

$$id : H_0^m(\Omega) \longrightarrow H_0^{m-1}(\Omega)$$

compact. $id : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$

C.à.d toute suite bornée de $H_0^1(\Omega)$ admet une ss-suite qui conv. dans $L^2(\Omega)$.

(b) $I_n = (2^{-n-1}, 2^{-n})$ dans $\mathbb{R}$

$$u_n = 2^{n/2} \cdot \mathbb{1}_{I_n}$$

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n .$$

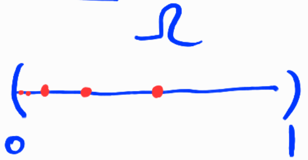
(1) $\| u_n \|_{L^2} \overset{?}{=}$ $\left(\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} 1^2 \cdot dx \right)^{1/2}$

$$= \sqrt{2^{-n} - 2^{-n-1}} = 2^{-n/2} \cdot \sqrt{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \|u_n\|_{L^2} = \sqrt{1/2}.$$

(2) $\underline{\text{Mq. } u_n \in H^1(\Omega)}$

• $u_n \in L^2(\Omega)$.



$$\langle 1_{I_n}, -\varphi' \rangle$$

Quel φ ?

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(\varphi), \partial\Omega) > 0$

$$= -\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi' = \underbrace{\varphi(2^{-n})}_{=0} - \underbrace{\varphi(2^{-n-1})}_{=0}.$$

$$= 0$$

$$= \langle 0, \varphi \rangle$$

Donc $u_n' = 0$ au sens $\mathcal{D}'$.

$$\|u_n\|^2_{H^1} = \|u_n\|_2^2 + \|\underbrace{Du_n}_{u_n' = 0}\|_2^2 = \frac{1}{2}.$$

(3) Mq (u_n) admet une ss-suite dans $H^1(\Omega)$ qui cv. faiblement.

Par le thm d'ALAOGLU (BANACH) ceci est vrai.

Alaoglu dit que (x_n^*) bornée dans X^* $\Rightarrow$ $(x^*_{\varphi(n)})$ cv. faibl*, i.e.

$\langle x^*_{\varphi(n)}, x \rangle$ cv. dans $\mathbb{R}$ pour tout x.

$H^1 \simeq (H^1)^{**}$ donne la version de Alaoglu du cours

Quelle est la limite faible ?

u_n. $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str. croiss.

$$u_{\varphi(n)} \longrightarrow u \text{ dans } H^1$$

signifie "cv. faible".

donc $\forall f \in H^1(\Omega) : \langle u_{\varphi(n)} | f \rangle_{H^1} \longrightarrow \langle u | f \rangle_{H^1}$.

Mais $\langle u_{\varphi(n)} | f \rangle_{H^1} = \int_\Omega u_{\varphi(n)} \cdot f + \cancel{\int_\Omega u_n' \cdot f'}$

et

$$\int_\Omega f \cdot u_n = \int_\Omega (f \cdot \mathbb{1}_{I_n}) \cdot u_n$$

$$\overset{C\text{-}S.}{\leq} \left(\int_{I_n} f^2\right)^{1/2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

et $\int_{I_n} f^2\, dx \longrightarrow 0$ par cv. dominé.

OR $0 = \langle 0 | f \rangle_{H^1}$ et la limite faible st unique,

$$u_{\varphi(n)} \longrightarrow 0.$$

(et en fait, $u_n \longrightarrow 0$, $\varphi = id$ convient).

Rem. u_n de norme const. et faiblem^t conv. vers 0 n'st pas une contradiction!

Autre ex. H Hilbert sép., (e_n) b.o.n. Alors $e_n \longrightarrow 0$

$\langle f | e_n \rangle \longrightarrow ?0?$ OUI car

$$\underbrace{\sum |\langle f | e_n \rangle|^2}_{\text{série cv.}} = \|f\|^2$$

donc terme général $\to 0$

④ $id : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$.

id lin., continue.

Mais pas compacte! Car sinon, (u_n) aurait une ss-suite qui cv en norme vers 0; Mais $\|u_n\|^2 = \frac{1}{2}$.

Il suit que Ω n'est pas régulier! (sinon contradict. avec Rellich).

FIN
