Bonjour. Vu : Ex 1, 2, 4, 5. (Bonus 6)
↑ cours !

(Ex 9, 8, 10, 7)

Ex 9

(1) $\begin{cases} -u'' + u = f \in L^2(\mathbb{R}) \\ u(x) \longrightarrow 0 \text{ si } |x| \to +\infty \end{cases}$

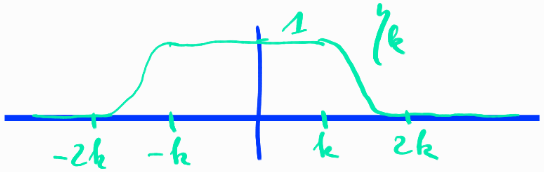
(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv.$

u s. classique : $u \in \mathcal{C}^2$ et (1) (donc f cont.)

---

a)

$\eta_k(x) \overset{\text{def}}{=} \eta\left(\frac{x}{k}\right)$



$\eta_1 = \eta.$

$g \in L^2(\mathbb{R})$. Q : Mq $\eta_k g \xrightarrow{L^2} g$.

à montrer : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \underbrace{|\eta_k g - g|^2}_{|g|^2 \underbrace{(1-\eta_k)^2}_{\longrightarrow 0}} dx \xrightarrow[k \to 0]{} 0.$

ponctuellement

et $(1-\eta_k)^2 \leq 1$

et $g \in L^2$. On applique cv. dominée avec g^2 comme majorant intégrable.

b) | Soit u solution classique. Mq $u \in H^1(\mathbb{R})$
| et u sol. faible.

Indic : multiplier (1) par $(u \cdot \eta_k)$ puis intégrer.

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} -u''(u\cdot\eta_k)}_{(a)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u \cdot (u \cdot \eta_k)}_{(b)} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f \cdot u \cdot \eta_k}_{(c)}$$

Est-ce qu'on peut intégrer sur $\mathbb{R}$ ici ?

$u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0$.

(a) : u, u'' continues, η_k aussi et à supp. compact.

⇝ l'intégrale sur $\mathbb{R}$ existe.

(b) pareil.

(c) $f \in L^2(\mathbb{R})$. 2 possibilités.

(c1) : $\displaystyle\int f \cdot \eta_k \overset{C\text{-}S}{\leq} \left(\int |f|\right)^{1/2} \left(\int |\eta_k|^2\right)^{1/2}.$

donc $f\cdot\eta_k \in L^1$ et u borné(!)

En effet, u cont. $/\mathbb{R}$ et limite nulle à l'infini impliquent u borné sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon = 1$. $\exists M : |x| \geq M \Rightarrow |u(x)| \leq \varepsilon$.
et u borné sur $[-M, M]$ car cet int. est compact.

(cl) : $(u\cdot\eta_k) \in L^2(\mathbb{R})$. u cont, η_k aussi & à supp. comp. $\Rightarrow (u\cdot\eta_k)$ borné.
Puis, C-S montre que $\int \underbrace{f}_{L^2}\cdot\underbrace{(u\cdot\eta_k)}_{L^2}$ existe.

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} -u'' u\eta_k + \int_{\mathbb{R}} u^2\eta_k = \int_{\mathbb{R}} f\cdot u\cdot\eta_k . \quad (3)$$

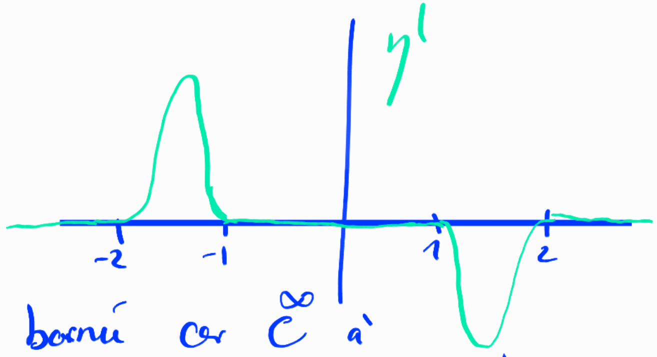
(rappel: (2) : $\int \underbrace{u'v'}_{} + \int uv = \int uf$)
que des dérivées premières!

Par IPP sur $[-3k, 3k]$, (3) devient

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} u'\cdot(u\eta_k)'}_{\int (u')^2\eta_k + \int u\cdot u\cdot\eta_k'} + \int_{\mathbb{R}} u^2\eta_k = \int_{\mathbb{R}} f\cdot u\cdot\eta_k$$

$(\Leftrightarrow)$ (4) $$\int_{\mathbb{R}} (u')^2 \underbrace{\eta_k}_{\geq 0} + \int_{\mathbb{R}} u^2(\eta_k + \eta_k') = \int_{\mathbb{R}} f\cdot u\cdot\eta_k$$

$$\eta_k(x) = \eta\left(\frac{x}{k}\right) \rightsquigarrow \eta_k'(x) = \frac{1}{k}\cdot\eta'\left(\frac{x}{k}\right)$$



η' est borné car C^∞ à supp. compact. $\|\eta_k'\|_\infty \leq \frac{C}{k}$.

En particulier, (4) donne :

$$\int_{\mathbb{R}} u^2(\eta_k + \eta_k') \leq \int_{\mathbb{R}} |f\cdot u\cdot\eta_k|$$

Par CS : $\int_{\mathbb{R}} u^2 \eta_k + \int_{\mathbb{R}} u^2 \eta_k' \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \eta_k\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} u^2 \eta_k\right)^{1/2}$

et $\left| \int_{\mathbb{R}} u^2 \cdot \eta_k' \right| \leq \frac{1}{k} \|\eta'\|_\infty \cdot \left(\int_{-2k}^{-k} + \int_{k}^{2k} \right) u^2$

⚠ signe

$$\leq 2 \|\eta'\|_\infty \cdot \underbrace{\sup_{|t| > k} u(t)^2}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0\,!}$$

Pour $\varepsilon > 0$ il ex. donc k_ε : $\forall k \geq k_\varepsilon$

$$a_k^2 - \varepsilon \leq \|f\|_2 \cdot a_k$$

où $a_k \overset{\text{def}}{:=} \left(\int_{\mathbb{R}} u^2 \eta_k \right)$.

Il suit $\left(a_k - \frac{\|f\|_2}{2}\right)^2 \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_2^2}{4}$

$$\Rightarrow a_k \leq \frac{\|f\|_2}{2} + \sqrt{\varepsilon + \frac{\|f\|_2^2}{4}}$$

$$\leq \|f\|_2 + \sqrt{\varepsilon}$$ (via $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$).

Donc (a_k) borné. Mais

$$a_{2k}^2 \geq \int_{-2k}^{2k} u^2 \geq a_k^2$$

donc (a_{2^n}) croissante, donc $a_{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Il suit facilement

$$\int_{-2^n}^{2^n} u^2 \leq a_{2^n} \leq a \qquad \forall n$$

et donc $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Rappelons ④ :

$$\int_{\mathbb{R}} \eta_k (u')^2 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u^2 (\eta_k + \eta_k')}_{(*)} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f \cdot u \cdot \eta_k}_{(**)}.$$

On a $|\eta_k + \eta_k'| \leq 1 + \frac{|\eta'|}{k} \leq 1 + C$

$u^2 \in L^1$

donc $(*) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} u^2$ par

cv. dominée

de même, $u \in L^2$, $f \in L^2 \Rightarrow u \cdot f \in L^1$

et $|\eta_k| \leq 1 \rightsquigarrow$

$$(**) \xrightarrow[k \to \infty]{} \int_{\mathbb{R}^2} u \cdot f.$$

Il suit

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (u')^2 \eta_k = \int_{\mathbb{R}} f \cdot u - \int_{\mathbb{R}} u^2$$

en particulier,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} (u')^2 = \int_{\mathbb{R}} f \cdot u - \int_{\mathbb{R}} u^2$$

Et finalement, $u' \in L^2$, donc

$$\boxed{u \in H^1(\mathbb{R})}$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} u' \varphi' + \int_{\mathbb{R}} u \varphi = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \varphi$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$ ceci est vrai $\forall v \in H^1(\Omega)$ à la place de $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ //

(c) Mq. Il a une sol. faible.

idée : $v \longmapsto \int f \cdot v$ est lin. et cont.

et à gauche on a

$$\langle u | v \rangle_{H^1}$$

On veut donc résoudre (trouver u)

$\forall v \in H^1$: $\langle u | v \rangle_{H^1} = \ell(v)$.

On utilise le thm de représent. de Riesz pour montrer qu'un tel $u \in H^1$ existe.

(d) Soit f continue, mq. u sol. classique.

① $u \in H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u$ continue.

② Au sens $\mathcal{D}'$, $\langle u'', \varphi \rangle = -\int u'\varphi'$.

Ainsi: $\int u'\varphi' + \int u\varphi = \int f \cdot \varphi$.

$$\iff \langle -u'', \varphi \rangle = \langle \underbrace{f-u}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Ce qui montre $u'' = u - f$ p.p.

Alors

$$\frac{u'(t+h)-u'(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u''(s)\,ds$$

Astuce

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (u(s)-f(s))\,ds \xrightarrow[h\to 0]{} u(t)-f(t).$$

montre que u' est dérivable, et $u'' = f-u$. qui est continue.

$\Rightarrow u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On a déjà vu

$$u'' + u = f \quad \text{p.p.}$$

ce qui donne, par continuité à gauche et droite, égalité partout. $\boxed{\square}$

Ex 10 $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \left(\int_\Omega u\right)\left(\int_\Omega v\right)$

(a) ("elliptique" = "coercive".)

- $a(u,v) = a(v,u)$
- $a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w + \beta \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w$

$$+ \alpha \left(\int_\Omega u\right)\left(\int_\Omega w\right) + \beta \left(\int_\Omega v\right)\left(\int_\Omega w\right)$$

$$= \alpha\, a(u,w) + \beta\, a(v,w).$$

donc linéaire dans le premier arg. ⊕ symétrique → <u>bilin.</u>

• a contin. si $V = H^1(\Omega)$

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \cdot \|v\|_V$$

Par CS : $\int_\Omega Du \cdot Dv \leq \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$

Par C-S : $\left| \int_\Omega u \cdot 1 \right| \leq |\Omega|^{1/2} \cdot \|u\|_{L^2}$

ou $v \cdot 1$

$$\leq |\Omega|^{1/2} \cdot \|u\|_{H^1}$$

$$\Rightarrow |a(u,v)| \leq \underbrace{(1 + |\Omega|)}_{= M} \cdot \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

Rappel : $a_\lambda(u,v) = \lambda \langle u | v\rangle + a(u,v)$.

• <u>a_λ coercive ?</u> Mq : $a_\lambda(u,u) \geq \delta \|u\|^2$

$$\lambda(u|u) + a(u,u) = \int_\Omega (Du)^2 + \underbrace{\cancel{\left(\int_\Omega u\right)^2}}_{\geq 0} + \lambda(u|u)$$

minoré avec 0 !

$$\geq \min(1,\lambda) \cdot \|u\|_{H^1}^2.$$

> <u>Remarque</u> : on a rajouté $\lambda\langle u|v\rangle$ à la forme. En effet, je ne vois pas comment "sauver" l'inégal. autrement : si on avait
>
> $$\left(\int u\right)^2 \gtrsim \int u^2 \text{ on obtiendrait}$$
>
> $$\|u\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{L^1} \overset{C-S}{\lesssim} \|u\|_{L^2}$$
>
> Ce qui est impossible.

(b) Pour $\lambda > 0$ on a donc que

$\mathcal{a}_\lambda(u,v) = \int_\Omega f\cdot v$ possède une sol. u_λ pour $f \in L^2$

$\longrightarrow$ Lax-Milgram ! $\forall v \in H^1(\Omega)$. Soit $\lambda = 1$

$$(u|v)_{H^1} + \int \nabla u \cdot \nabla v + \left(\int_\Omega u\right)\left(\int_\Omega v\right) = \int_\Omega f\cdot v$$

$v = \mathbb{1}_\Omega$. on a

$$\int_\Omega u + \left(\int_\Omega u\right)|\Omega| = \int_\Omega f$$

donne $\boxed{\int_\Omega u = \left(\frac{1}{1+|\Omega|}\right)\cdot\int_\Omega f}$

(c) Si $\int_\Omega f = 0$, $\int_\Omega u = 0$, et la forme se simplifie : D'un côté,

(*) $$\mathcal{a}_1(u,v) = \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

de l'autre, $\mathcal{a}_1(u,v) = \langle Au | v\rangle_{L^2}$.

Appliquons (*) à $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Alors $\mathcal{a}_1(u,\varphi) = \int_\Omega (u - \Delta u)\cdot\varphi$.

L'équation $\mathcal{a}_1(u,\varphi) = \ell(\varphi) = \int f\cdot\varphi$ devient donc

$$\int_\Omega (u-\Delta u)\cdot\varphi = \int_\Omega f\cdot\varphi$$

donc $\boxed{u - \Delta u = f \text{ au sens } \mathcal{D}'}$

— fin —

P.S. me contacter par mail s'il y a des questions !