Exercice 1 Trouver toutes les solutions de edp

$$\text{(a) } \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{(b) } \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{et de} \quad \text{(c) } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

Exercice 2 On considère $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ sur $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

a) Pour un solution u supposé, effectuer le changement de variables $\xi(x,t) = x + ct$ et $\eta(x,t) = x - ct$. et considérer $u(x,t) = v(\xi(x,t), \eta(x,t))$. Quelle EDP satisfait $v(\xi,\eta)$?

b) La résoudre!

c) Déduire une formule pour la solution “générale” de l'équation initiale.

d) Résoudre $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ avec une condition initiale, notemment $u(x,0) = f(x)$ et $u_t(x,0) = g(x)$. Montrer la formule d'Alembert

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right] + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

Exercice 3 Soit $\Omega = [0,1] \times (0,\infty)$.

a) Chercher toutes les solutions positives de $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ sur Ω qui sont de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$.

b) Donner toutes les solutions $u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t)$ sur Ω à satisfaire les conditions de bord $u(0,t) = u(1,t) = 0$.

c) En superposant les solutions de la question suivante, déduire *une* solution u qui satisfait l'edp, les conditions au bord **et** la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$ pour $x \in [0,1]$, où φ est une fonction continue qui s'annule en $\{0,1\}$.

d) Expliciter la solution pour la condition initiale $\varphi(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2}\sin(3\pi x)$.

Exercice 4 Sur $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times (0,\infty)$ résoudre $u_t(x,y,t) = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})(x,y,t)$ de façon analogue à la question précédente.

Exercice 5 *(Une inégalité de Poincaré)* Soit $f \in C^1([a,b])$ et $f(a) = 0$. En écrivant $f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$ montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de a,b), telle que

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \;\le\; C\int_a^b |f'(x)|^2\,dx$$

Etendre au cas d'une fonction de classe C^1 sur bande $(t,x) \in [0,L] \times \mathbb{R}^{n-1}$ qui s'annule sur le bord $t \in \{0,L\}$.

Exercice 6 *(Formule de Green en dimension 2)* Soit $R : [a,b] \to (0,\infty)$ de classe C^1 tel que $R(a) = R(b)$, et $\varphi : [a,b] \to [0,2\pi]$ de classe C^1, croissant et surjectif. Soit

$$\Omega = \{(r\cos(\varphi(t)), r\sin(\varphi(t))) \;:\; t \in [a,b], 0 \le r \le R(t)\}$$

$\partial\Omega$ est une courbe paramétré fermée orienté positive, une paramétrisation étant donné par
$$\gamma(t) = (R(t)\cos(\varphi(t)), R(t)\sin(\varphi(t)))\,,$$
Soient $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

a) On pose $\eta(r,t) = u(r\cos(\varphi(t)), r\sin(\varphi(t)))$. Exprimer $u_x(r\cos(\varphi(t)), r\sin(\varphi(t)))$ en termes de η_r et η_t.

b) Ecrire $I = \int_\Omega u_x(x,y)\, d(x,y)$ en coordonnés polaires, puis utiliser la formule trouvé au-dessus et une intégration par parties pour établir
$$I = \int_a^b R(t)\varphi'(t)\cos(\varphi(t))\eta(R(t),t)\,dt - \int_a^b \int_0^{R(t)} \varphi'(t)\cos(\varphi(t))\eta(r,t) + \sin(\varphi(t))\eta_t(r,t)\, drdt$$

c) Calculer
$$\tfrac{d}{dt}\left(\int_0^{R(t)} \sin(\varphi(t))\,\eta(r,t)\,dr\right)$$

d) Injecter le résultat de 3 dans la formule obtenu en 2, puis simplifier en observant $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 2\pi$.

e) Déduire
$$\int_\Omega u_x(x,y)\, d(x,y) = \int_\gamma u(x,y)\,dy$$

f) Réproduire le même raisonnement pour démontrer
$$\int_\Omega v_y(x,y)\, d(x,y) = -\int_\gamma v(x,y)\,dx$$

Exercice 7 Soit Ω un ouvert borné étoilé de $\mathbb{R}^2$ comme dans l'exercice précédent. On écira $X = (x,y)$ pour les élément de Ω. On s'intéresse aux solutions régulières (c'est à dire, de classe C^2) de
$$\begin{cases} -\Delta u(X) + \frac{\partial u(X)}{\partial x} = f(X) & \forall X \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. Soit f continue sur $\overline{\Omega}$ et u une solution de (1) de classe $C^2(\overline{\Omega})$.
   a) Montrer que les intégrales $\int_\Omega |u(X)|^2 dX$ et $\int_\Omega |\nabla u(X)|^2 dX$ existent et sont finies.
   b) Montrer que $\int_\Omega (-\Delta u)u\, d(x,y) = \int_\Omega |\nabla u(x,y)|^2\, d(x,y)$.

2. Soient désormais f_1, f_2 deux fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On note u_k une solution de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ de l'équation (1) avec $f = f_k$, $k = 1,2$ respectivement.
   a) Montrer que
   $$\int_\Omega |\nabla u_1(X) - \nabla u_2(X)|^2 dX \leq \int_\Omega |f_1(X) - f_2(X)||u_1(X) - u_2(X)| dX.$$
   b) En utilisant l'inégalité de Poincaré, montrer que
   $$\Big(\int_\Omega |\nabla u_1(X) - \nabla u_2(X)|^2 dX\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C\Big(\int_\Omega |f_1(X) - f_2(X)|^2 dX\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
   c) Montrer l'unicité des solutions de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ à l'équation (1).