Exercice 1 (Un théorème de Borel sur l'espace des fonctions C^∞ .. de 1895) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existent des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infiniment dérivables et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad f^{(n)}(0) = a_n.$$

a) En utilisant une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de 0, résoudre le problème dans le cas que la série entière $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence non nul.

b) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[-1, 1]$ et égale à 1 sur $[-1/2; 1/2]$. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \tfrac{a_n}{n!} x^n \phi(x) \qquad \text{et} \qquad M_n = \sup\{|f_n^{(k)}(x)| : \ x \in \mathbb{R}, k < n\}.$$

On définit une suite λ_n par $\lambda_n = \max(2, 2^n M_n)$ et pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n^{-n} f_n(\lambda_n x) = \sum_{n=0}^\infty \tfrac{a_n}{n!} x^n \phi(\lambda_n x).$$

Montrer que la série définissant f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la série des dérivés k-ièmes de $\lambda_n^{-n} f_n(\lambda_n x)$ converge uniformément en $x \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé.

d) Déduire que f est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et calculer $f^{(k)}(0)$.

e) Est-il toujours possible d'obtenir une fonction vérifiant la même propriété si on demande que f soit entière?

Exercice 2 Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $L = \operatorname{supp} f$. Que peut on dire de la distance (euclidienne) de L à $\partial\Omega$?

Exercice 3 Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par $f_n(t) = \frac{1}{2^n} \exp\left(\frac{-1}{(1-t/n)^2}\right)$ si $|t| < n$ et zéro sinon. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ que l'on précisera. A-t-on convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Exercice 4 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \le \varphi \le 1$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset [1, 2]$, $\varphi = 1$ sur $[a, b]$ où $1 < a < b < 2$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n(x) = e^{-n} \varphi(nx).$$

Montrer que $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. A-t-on $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$?

Exercice 5

a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $h \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $h * f = f$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R})$ (Indication: comment est-ce qu'on montre que l'unité d'un groupe est unique? S'inspirer de cette idée en remplaçant δ_0 par une approximation convenable pour trouver un argument par absurde).

b) Existe-t-il une telle fonction $\delta \in L^1(\mathbb{R})$? (modifier un peu les idées de la première question).

Exercice 6 Lesquelles des applications suivantes $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définissent des distributions?

a) $T\varphi = \varphi(0)^2$
b) $T\varphi = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, dt$.
c) $T\varphi = \int_{[0,1]} \varphi^{(k)}(t)\, dt$ où $k \in \mathbb{N}$.
d) $T\varphi = \sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t)$.
e) $T\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{1}{k}) - n\varphi(0) - \ln(n)\varphi'(0)$.
f) $T\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(0)$.
g) $T\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k)$.

Exercice 7 Démontrer que l'on définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \qquad \langle T, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Cette distribution, dite *valeur principale* est noté $\mathrm{vp}(1/x)$. Montrer que son ordre est inférieur ou égal à 1.

Exercice 8 Pour $-2 < \alpha < -1$ et $\varepsilon > 0$ montrer que quelque soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\alpha}\phi(x)\, dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_{\varepsilon}$$

où la constante A ne dépend pas de $\varepsilon > 0$. Montrer que R_ε tend vers une limite quand $\varepsilon \to 0+$. On appelle $\langle \mathrm{pf}\; x_+^{\alpha}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} R_\varepsilon$ la *partie finie* de x^α. Montrer qu'il s'agit d'une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

Exercice 9 Soit $0 \neq \phi$ une fonction positive de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de support dans $]0, \infty[$. Démontrer qu'il existe deux constantes $C, \beta > 0$ telles que, pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\int_0^{\infty} \exp({}^{n}\!/_{t})\phi(t)\, dt \geq C \exp(\beta n).$$

En déduire qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(]0, \infty[)$ on ait $\langle T, \phi \rangle = \int_0^{\infty} \exp({}^{1}\!/_{t})\phi(t)\, dt$. On pourra considérer les fonctions $\phi_n(t) = \phi(nt)$ pour un $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[{}^{1}\!/_{2}, 1]$.

Exercice 10 Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ de classe C^1 par morceaux. Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ une subdivision adaptée à f, c'est-é-dire que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Montrer que l'on a :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(f(a_i{+}0) - f(a_i{-}0)\right) \delta_{a_i},$$

où f' est la dérivée usuelle de f, définie hors des points a_i, et $f(a_i{\pm}0)$ sont les limites à droite et à gauche de f en a_i (les distributions sont considérées comme éléments de $\mathcal{D}'(]a, b[)$.