Indications pour le reste de la feuille 4

Exercice 6 Soit $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Considérons

$$\begin{cases} -\Delta u - \alpha|u|^{\beta-1}u = 0 & \text{pour} \quad x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

Montrer qu'il existe une solution non-triviale $u \in H_0^1(\Omega)$. On introduit pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$F_\beta(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{\beta+1}\int_\Omega |u|^{\beta+1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

a) Montrer que l'inclusion $\iota : L^2(\Omega) \to L^{\beta+1}(\Omega)$, $\iota(f) = f$ est continue. *Hölder et $\lambda(\Omega) < \infty$ où λ est la mesure de Lebesgue.*

b) Montrer que $F_\beta(u) \to +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1} \to +\infty$. Indication: utiliser l'inégalité de Poincaré, et, dans un premier temps, considérer $F(tu)$ quand $t \to +\infty$. *pour $F(tu)$ on aperçoit les échelles t^2 et $t^{\beta+1}$ ... qui gagne? Voilà. On refait la même chose en majorant le terme négatif via Poincaré, en respectuant les exposants différents*

c) Montrer qu'il existe une suite bornée $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} F_\beta(u_n) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} F_\beta(u)$$

Puisque $F \to +\infty$ si $\|u\| \to +\infty$, il existe un $R > 0$ tel que $F(u) > F(0) = 0$ pour tout $\|u\| > R$. Le infimum est donc pris dans la boule $B[0, R]$. Par def. du inf, il existe une suite (u_n) tel que $F(u_n) < \inf + \frac{1}{n}$.

d) Justifier que (u_n) admet une sous-suite faiblement convergente. *Toute suite bornée d'un espace de Banach reflexif admet une sous-suite qui converge faiblement. Autrement dit: les boules fermés sont faiblement compacts.*

e) Quitte à passer à cette sous-suite, on peut supposer que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$. Montrer qu'alors $\|u_n - u\|_{L^{\beta+1}} \to 0$. (indication: Rellich). *Par Rellich, $u_n \to u$ en norme L^2, Hölder fait le reste*

f) Utiliser $\|u\|_{H_0^1}^2 = \lim_n \langle u, u_n\rangle$ pour montrer que

$$F_\beta(u) \le \liminf F_\beta(u_n) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} F_\beta(u)$$

D'abord,

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = |\langle u, u\rangle_{H_0^1}| = |\langle u, \lim u_n\rangle_{H_0^1}| = \lim |\langle u, u_n\rangle_{H_0^1}| \le \liminf \|u\|_{H_0^1}\|u_n\|_{H_0^1}$$

et on simplifie par norme de u. Le deuxième terme est traité avec le lemme de Fatou.

g) Soit $0 \ne h \in H_0^1(\Omega)$. Justifier que $\phi(t) = F_\beta(u + th) - F_\beta(u)$ admet un minium en $t = 0$. Justifier que si la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_\beta(u+th) - F_\beta(u)}{t}$$

existe, alors elle est nulle. *Puisque u est un mimimiseur, $\phi(t)$ qdmet un minimum en $t = 0$. On applique Rolle. La limite du quotient est une dérivé directionnelle de F (on dit "dérivée de Gateaux" dans ce contexte de dim. infinie)*

h) Montrer que

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_\beta(u+th)-F_\beta(u)}{t}=\int_\Omega \nabla u\nabla h-\alpha\int_\Omega |u|^{\beta-1}uh.$$

En déduire que u est la solution variationnelle de (P) *Simple: développer $F(u+th)$ puis soustarire $F(u)$. Il reste un terme en t et un autre en t^2 qui s'efface par la limite. Visiblement cette limite existepour $h\in H_0^1$, elle est donc nulle. Ceci correspond a multiplier l'EDP avec h et faire une "IPP" (formules de Green)*

i) Reste à montrer que u est non-trivial: Soit $0\neq w\in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $F_\beta(tw)<0$ pour un $t>0$ suffisemment petit (exploiter $\beta+1<2$). En déduire que $u\neq 0$. *observons que*

$$F_\beta(tw)=\frac{t^2}{2}\int_\Omega|\nabla w|^2-\frac{\alpha\ t^{\beta+1}}{\beta+1}\int_\Omega|w|^{\beta+1}=C_1t^2-C_2t^{\beta+1}<0,$$

d'òu $F_\beta(u)\le F_\beta(tw)<F(0)=0$ et ainsi $u\neq 0$.

Exercice 7 Soit H un espace de Hilbert et $\mathfrak{a}:H\times H\to\mathbb{R}$ une application sesquilinéaire satisfaisant $\mathfrak{a}(x,y)\le M\|x\|\|y\|$ et $\mathrm{Re}\mathfrak{a}(x,x)\ge m\|x\|^2$.

a) Montrer que pour tout $u\in H$ il existe $w\in H$ tel qu'on ait pour tout $v\in H$ $\mathfrak{a}(v,u)=\langle v|w\rangle_H$.

b) Soit $Au:=w$. Montrer que A est linéaire, puis considérer $\|Au\|^2=\mathfrak{a}(Au,u)$ pour montrer que A est continu.

c) Utilisez $\mathrm{Re}\mathfrak{a}(x,x)\ge m\|x\|^2$ pour montrer que $\|Au\|\ge m\|u\|$. En déduire que A est injectif et à image fermé (indication: utilisez la complétude de H).

d) Montrer que l'image de A est dense : supposons existe un $w\perp \mathrm{Image}(A)$.Montrez que $w=0$.

e) Ainsi, A est linéaire, continu, bijectif. Montrer que $A^{-1}\in\mathscr{L}(H)$.

f) Soit $L:H\to\mathbb{R}$ linéaire et continu. Montrer qu'il existe $u\in H$ tel qu'on a égalié entre les applications $v\mapsto\mathfrak{a}(u,v)$ et L.

C'est du COURS

Exercice 8 On veut résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u''+u=f \text{ sur } \mathbb{R},\\ u(x)\to 0 \text{ quand } |x|\to\infty,\end{cases}\tag{1}$$

avec $f\in L^2(\mathbb{R})$. Une solution classique est une solution $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant (1). On dira que $u\in H^1(\mathbb{R})$ est une solution faible de (1) si

$$\forall v\in H^1(\mathbb{R}):\qquad \int_\mathbb{R}u'v'+\int_\mathbb{R}uv=\int_\mathbb{R}fv.$$

a) Soit $\eta\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ une "fonction plateau" à support dans $[-2,2]$ telle que $0\le\eta\le 1$ et $\eta|_{[-1,1]}=1$. On définit la suite $\eta_k(x)=\eta(\frac{x}{k})$. Montrer que si $g\in L^2(\mathbb{R})$ alors $\eta_k g\to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$. *convergence dominée.*

b) Soit u une solution classique de (1). Multiplier l'équation différentielle par $u\cdot\eta_k$ et intégrer pour montrer que $u\in H^1(\mathbb{R})$. *On fait ce qui est domandé. Le coté droit est estimé contre $\|f\|_2\|u\eta_k\|_2$. Sur la gauche on a 3 termes: $(u')^2\eta_k$ et $u^2\eta_k$ et*

$u'ueta'_k$. On observe $\eta'_k \le C/k\mathbb{1}_{[-2k,2k]}$ et le produit $|uu'|$ est majorée par $|u|^2+|u'|^2$. Observons le carré à gauche, le terme sans carré à droite. La conclusion est que $\|u\eta_k\|_2$ et bornée si $k \to \infty$. Mais $\|u\eta_k\|_2 \ge \|u\|_{L^2(-k,k)}$ qui est donc bornée en k - ce qui dit $u \in L^2$. Il suit immédiatement $u' \in L^2$. Montrer ensuite que u est aussi une solution faible de (1). *IPP.*

c) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible à (1). *L'équation s'écrit $\langle u, v\rangle_{H^1} = \ell(v)$, avec ℓ lin. et continue sur H^1. Alors le thm de Riesz montre existence et unicité d'un u ui représente cette fonctionnelle.*

d) On suppose que f est continue. Montrer alors que la solution faible de (1) est dans $C^2(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 9 Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, on pose :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \left(\int_\Omega u\right)\left(\int_\Omega v\right).$$

a) Montrer que a est bilinéaire, continue et elliptique sur $H^1(\Omega)$. *a est le produit scalaire de H^1 entre u et v.*

b) Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe un et un seul u solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \;\; a(u,v) = \int_\Omega fv.$$

Lemme de Riesz! Montrer qu'alors $\int_\Omega u = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_\Omega f$.

c) Dans le cas où $\int_\Omega f = 0$, quelle est l'EDP vérifiée par u ? *Dans l'intérieur, clairement $\Delta u = 0$. De plus $tr : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ est à image dense. Donc décssairement ${}^t(u) = 0$. C'est donc le pb de Dirichlet*

Exercice 10 (Estimées de Garding) En principe les questions expliquent tout. Pour les détails, regarder dans un livre d'EDP (Evans, p.ex.). C'est traité partout.