Exercice 1 Soit $\alpha \in (0,1)$ fixé et $\beta > 0$.
Soit $Q = (0,1) \times (0,1)$ et $\Omega_\alpha = \{(x,y) \in Q : \quad y > x^\alpha\}$.

a) Quelle est la régularité de $\partial\Omega_\alpha$?
b) Montrer que $u(x,y) = y^{-\beta}$ est dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega_\alpha)$ ssi $1 + \frac{1}{\alpha} > p(1+\beta)$.
c) Soit $p > d = 2$ et β choisi suffisement petit pour que la condition de (b) soit satisfaite. La fonction $u \in W^{1,p}(\Omega_\alpha)$, admet-elle une extension à $W^{1,p}(Q)$?
d) Est-ce que cette construction reste valable si $\alpha = 1$?

Exercice 2 (DS 2017)

a) Rappeler le théorème de compacité de Rellich.
b) Soit $I_n = (2^{-n-1}, 2^{-n})$, $u_n = 2^{n/2}\mathbb{1}_{I_n}$ et $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} I_n$.
   i) Calculer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$.
   ii) Montrer $u_n \in H^1(\Omega)$ pour tout n.
   iii) Montrer que (u_n) admet une sous-suite extraite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$. Montrer que cette limite faible est $u = 0$.
   iv) L'injection $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est elle continue? compacte? Que déduire sur la régularité de Ω?

Exercice 3

a) Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in K(X,Y)$. Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge (en norme) vers Tx.
b) Soit Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit $\langle f\rangle_\Omega := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\,dx$ la moyenne de f sur Ω. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^1(\Omega)$,

$$\left\|f - \langle f\rangle_\Omega\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1}$$

   Indications: effectuer un raisonnement par l'absurde : si l'inégalité est fausse, il existe une suite de fonctions $f_n \in H^1$ tel qu'on ait $\left\|f_n - \langle f_n\rangle_\Omega\right\|_{L_2} > n\|\nabla f_n\|_{L^2}$, pour tout n.
   i) Construire une suite de fonctions (g_n) tel que g_n est à moyenne nulle, de norme L^2 constant à un, et que $\|\nabla g_n\| \leq \frac{1}{n}$.
   ii) Montrer qu'il existe une sous-suite extraite $(g_{\sigma(n)})$ qui converge dans H^1 faiblement vers une limite, appelons la g.
   iii) Montrer par (a) qu'on peut supposer que $(g_{\sigma(n)})$ converge vers g en norme $L^2(\Omega)$.
   iv) En déduire la norme et la moyenne de g.
   v) Montrer que $\nabla g = 0$, puis trouver une contradiction.
c) Montrer par un contre-exemple que (1) n'est pas vraie si Ω n'est pas supposé connexe.

Exercice 4 Soit $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Considérons

$$\begin{cases} -\Delta u - \alpha |u|^{\beta-1} u = 0 & \text{pour} \quad x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{pour} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

Montrer qu'il existe une solution non-triviale $u \in H_0^1(\Omega)$. On introduit pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$F_\beta(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{\beta+1} \int_\Omega |u|^{\beta+1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

a) Montrer que l'inclusion $\iota : L^2(\Omega) \to L^{\beta+1}(\Omega)$, $\iota(f) = f$ est continue.
b) Montrer que $F_\beta(u) \to +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1} \to +\infty$. Indication: utiliser l'inégalité de Poincaré, et, dans un premier temps, considérer $F(tu)$ quand $t \to +\infty$.
c) Montrer qu'il existe une suite bornée $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} F_\beta(u_n) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} F_\beta(u)$$

d) Justifier que (u_n) admet une sous-suite faiblement convergente.
e) Quitte à passer à cette sous-suite, on peut supposer que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1(\Omega)$. Montrer qu'alors $\|u_n - u\|_{L^{\beta+1}} \to 0$. (indication: Rellich).
f) Utiliser $\|u\|_{H_0^1}^2 = \lim_n \langle u, u_n \rangle$ pour montrer que

$$F_\beta(u) \le \liminf F_\beta(u_n) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} F_\beta(u)$$

g) Soit $0 \neq h \in H_0^1(\Omega)$. Justifier que $\phi(t) = F_\beta(u + th) - F_\beta(u)$ admet un minium en $t = 0$. Justifier que si la limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_\beta(u+th) - F_\beta(u)}{t}$$

existe, alors elle est nulle.
h) Montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F_\beta(u+th) - F_\beta(u)}{t} = \int_\Omega \nabla u \nabla h - \alpha \int_\Omega |u|^{\beta-1} u h.$$

En déduire que u est la solution variationnelle de (P)
i) Reste à montrer que u est non-trivial: Soit $0 \neq w \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $F_\beta(tw) < 0$ pour un $t > 0$ suffisemment petit (exploiter $\beta + 1 < 2$). En déduire que $u \neq 0$.

Exercice 5 Soit H un espace de Hilbert et $\mathfrak{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ une application sesquilinéaire satisfaisant $\mathfrak{a}(x,y) \le M\|x\|\|y\|$ et $\mathrm{Re}\mathfrak{a}(x,x) \ge m\|x\|^2$.
a) Montrer que pour tout $u \in H$ il existe $w \in H$ tel qu'on ait pour tout $v \in H$ $\mathfrak{a}(v,u) = \langle v|w\rangle_H$.
b) Soit $Au := w$. Montrer que A est linéaire, puis considérer $\|Au\|^2 = \mathfrak{a}(Au, u)$ pour montrer que A est continu.
c) Utilisez $\mathrm{Re}\mathfrak{a}(x,x) \ge m\|x\|^2$ pour montrer que $\|Au\| \ge m\|u\|$. En déduire que A est injectif et à image fermé (indication: utilisez la complétude de H).

d) Montrer que l'image de A est dense : supposons existe un $w \perp \text{Image}(A)$.Montrez que $w = 0$.

e) Ainsi, A est linéaire, continu, bijectif. Montrer que $A^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.

f) Soit $L : H \to \mathbb{R}$ linéaire et continu. Montrer qu'il existe $u \in H$ tel qu'on a égalié entre les applications $v \mapsto \mathfrak{a}(u, v)$ et L.

Exercice 6 On veut résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{2}$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R})$. Une solution classique est une solution $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant (2). On dira que $u \in H^1(\mathbb{R})$ est une solution faible de (2) si

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}) : \qquad \int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv.$$

a) Soit $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une "fonction plateau" à support dans $[-2, 2]$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta|_{[-1,1]} = 1$. On définit la suite $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k})$. Montrer que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\eta_k g \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

b) Soit u une solution classique de (2). Multiplier l'équation différentielle par $u \cdot \eta_k$ et intégrer pour montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer ensuite que u est aussi une solution faible de (2).

c) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible à (2).

d) On suppose que f est continue. Montrer alors que la solution faible de (2) est dans $C^2(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 7 Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, on pose :

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \left(\int_\Omega u \right) \left(\int_\Omega v \right).$$

a) Montrer que a est bilinéaire, continue et elliptique sur $H^1(\Omega)$.

b) Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe un et un seul u solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_\Omega fv.$$

Montrer qu'alors $\int_\Omega u = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_\Omega f$.

c) Dans le cas où $\int_\Omega f = 0$, quelle est l'EDP vérifiée par u ?

Exercice 8 (Estimées de Garding) Soit Ω un ouvert borné régulier, et pour $i, j = 1 \dots n$ on suppose $a_{ij}(.), b_i(.), c(.) \in L^\infty(\Omega)$. Soit

$$(Lu)(x) = -\sum_{i}^{n} D_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)(D_j u)(x)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)(D_i u)(x) + c(x)u(x)$$

où on suppose qu'il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta|\xi|_2^2$.

Montrer que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et λ suffisemment grand, le problème de Dirichlet $Lu + \lambda u = f$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ admet une solution. Indications: Soit

$$\mathfrak{a}(u,v) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)(D_j u)(x)(D_i v)(x)}_{\mathfrak{a}_1(u,v)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega v(x) b_i(x)(D_i u)(x) v(x)\, dx}_{\mathfrak{a}_2(u,v)} + \underbrace{\int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx}_{\mathfrak{a}_3(u,v)}$$

a) Montrer que $\mathfrak{a}_1(u,u) \geq \delta \|u\|_{H^1}\|u\|_{L^2}$.

b) Montrer que $\mathfrak{a}_2(u,u) \leq \|b\|_\infty \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\alpha\beta \leq \tfrac{\varepsilon}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2\varepsilon}\beta^2$$

c) En déduire que

$$\mathfrak{a}(u,u) \geq (\delta - \tfrac{\varepsilon}{2}\|b\|_\infty)\|u\|_{H^1}^2 - (\tfrac{n}{2\varepsilon}\|b\|_\infty + \|c\|_\infty)\|u\|_{L^2}^2$$

d) Justifier que $\mathfrak{a}(.,.)$ est associé au cas $\lambda = 0$. Quelle forme est associé à un $\lambda > 0$? Pourquoi est-ce que les conditions de Lax-Milgram (Exercice 7) sont satisfaits dès que $\lambda > \lambda_0$, pour un certain λ_0?