Université Bordeaux1, **Master 1 de Mathématiques**

Examen d'Analyse Fonctionnelle

17 decembre 2008. Durée: 4h

Exercice 1. 1) Soit E un espace de Banach, $D \subseteq E$ une partie dense et $(S_n)_n$ une suite d'opérateurs sur E qui satisfait $\|S_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si la suite $(S_n x)_{n\geq 0}$ converge pour tout $x \in D$, la suite $(S_n x)_{n\geq 0}$ converge pour tout $x \in E$.
2) Soit désormais $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et T l'opérateur donné par

$$(Tf)(s) = \int_0^1 f(st)\, dt.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$ et calculer sa norme.
3) Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$. Montrer que $S_n \in \mathcal{L}(E)$. Que peut-on dire sur les normes de S_n ?
4) Pour un polynôme $p(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j$, donner une expression pour $(Tp)(s)$. En déduire une représentation pour $(T^k p)(s)$ (on pourra argumenter par récurrence).
5) Montrer que pour tout polynôme p, $(S_n p)_n$ est une suite de Cauchy dans E. Indication: on pourra montrer que pour $p(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j$ et $n > m$

$$\|S_n(p) - S_m(p)\| \leq \sum_{j=0}^{d} |a_j| \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+j)^k} - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(1+j)^k} \right|.$$

Ensuite estimer terme par terme (on pourra distinguer les cas $j = 0$ et $j > 0$ et pour ce dernier étudier la suite réelle (j étant fixé) $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+j)^k}$ pour conclure.
6) En déduire que la suite (S_n) converge fortement vers un opérateur S sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$, de norme $\|.\|$. Soit T un opérateur linéaire continu de E dans lui même.

1) a) Rappeler les définitions de l'ensemble résolvant $\rho(T)$ et du spectre $\sigma(T)$ de T.
b) Montrer que $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

c) Rappeler et demontrer l'équation de la résolvante.
d) Soit $(\lambda_n)_n \in \rho(T)$ qui converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lambda \in \rho(T)$ *si et seulement si* la suite $\|(\lambda_n I - T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)}$ est bornée.

2) On appelle *valeur propre approchée* de T tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe une suite $(x_n) \in E$ vérifiant:

$$\|x_n\| = 1 \text{ pour tout } n \text{ et } \|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0\,(n \to +\infty).$$

On note $VPA(T)$ l'ensemble des valeurs propres approchées de T.
a) Montrer que si $\lambda \in VPA(T)$ alors $\lambda \in \sigma(T)$.
b) On définit

$$\xi(\lambda) = \inf_{x \in E, \|x\|=1} \|\lambda x - Tx\|.$$

Montrer que $\lambda \in VPA(T)$ *si et seulement si* $\xi(\lambda) = 0$.
c) Montrer que la fonction ξ est Lipschitzienne.
d) Est-ce que $VPA(T)$ est un fermé de $\mathbb{C}$?

3) Soit $\lambda \in \partial\sigma(T)$ (le bord de $\sigma(T)$).
a) Expliquer pourquoi il existe une suite $(\lambda_n) \in \rho(T)$ et $x \in E$ tels que

$$\lambda_n \to \lambda \text{ et } \|(\lambda_n I - T)^{-1}x\| \to +\infty.$$

b) En considérant la suite

$$x_n = \frac{(\lambda_n I - T)^{-1}x}{\|(\lambda_n I - T)^{-1}x\|}$$

montrer que $\lambda \in VPA(T)$.
c) Peut-on avoir $VPA(T) = \emptyset$?
d) Peut-on avoir un opérateur T dont l'ensemble des valeurs propres soit vide ?

Exercice 3. Soit $p \in [1, +\infty[$ et ℓ^p l'espace des suites complexes $p-$sommables. On considère l'opérateur $S_p : \ell^p \to \ell^p$ défini par:

$$S_p(x_0, x_1, ...) = (0, x_0, x_1, ...).$$

a) Calculer la norme de l'opérateur S_p.
b) Quel est l'opérateur adjoint de S_p ?
c) Quels sont les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'image de $\lambda I - S_p$ n'est pas dense dans ℓ^p ?
d) Quel est le spectre de S_p ?
e) S_p est-il compact ?