Exercice 1 Soit Ω un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ une partition de Ω, i.e.

$$\forall i \neq j : \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \ \text{ (mais } A_i, A_j \neq \emptyset), \qquad \text{et} \qquad \Omega = \bigcup A_j.$$

Déterminer la cardinalité de $\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\})$.

Exercice 2 Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \{[n, +\infty) : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$. Déterminer $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer

$$\bigcap_{x \in A \text{ et } A \in \mathcal{A}} A.$$

Exercice 3 (mesurable vs. négligeable) Soit Ω un ensemble avec au moins deux éléments.

a) On pose $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Soit δ_a la mesure de Dirac sur $\mathscr{A}$ et μ_d la mesure de dénombrement sur $\mathscr{A}$.

   1. Quels sont les ensembles négligeables de $(\Omega, \mathscr{A}, \delta_a)$?
   2. Quels sont les ensembles négligeables de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_d)$?

b) Soit $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a\}^{\complement}, \Omega\}$. Donner un exemple d'une partie négligeable de Ω qui soit non mesurable.

c) Sur $\mathbb{R}$, montrer que tout ensemble Lebesgue mesurable est d'intérieur vide.

d) Trouver une partie de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide qui n'est pas négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 4* (Les tribus infinis sont indénombrables!) Soit Ω un ensemble non-vide et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω. Pour $x \in \Omega$, on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathscr{T} : \ x \in T\} \qquad \text{et} \qquad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

a) Soit $y \in [x]$. Montrer que $[y] \subset [x]$.

b) Soit $y \in [x]$. Montrer que $x \in [y]$. En déduire que $x \sim y$ si $x \in [y]$ est une relation d'équivalence sur Ω.

c) Montrer que $\mathcal{P} = \{[x] : \ x \in \Omega\}$ est une partition de Ω.

d) Soit $T \in \mathscr{T}$. Montrer que $T = \bigcup_{x \in T} [x]$.

e) Montrer que $\mathcal{P}$ est infinie si $\mathscr{T}$ est infinie.

f) Soit $\mathcal{P}$ infinie. On veut démontrer par absurde que $\mathscr{T}$ est indénombrable.

   1. Si $\mathscr{T}$ était dénombrable, alors $[x] \in \mathscr{T}$ pour tout $x \in \Omega$.
   2. Montrer qu'on peut choisir une suite $(P_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{P}$ telle que les éléments de la suite sont deux à deux disjoints. S'en servir pour construire une injection $\phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{T}$. Déduire que $\mathscr{T}$ est indénombrable*

*on pourra supposer que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est indénombrable sans le démontrer.