Dénombrements

Exercice 1 Soit Ω un ensemble et $F_n \subset \Omega$, $n \geq 1$ une suite d'ensembles. Construire des parties $G_n \subset \Omega$ telles que

a) $\bigcup F_n = \bigcup G_n$
b) Pour tout $n \neq k$, on a $G_n \cap G_k = \emptyset$.

Exercice 2 Soit (F_n) une suite d'ensembles finis (et non vides) de Ω. Montrer que $\bigcup F_n$ est dénombrable (on pourra se servir de la question précédente). Applications:

a) Soit $\mathbb{Q}_n = \{\frac{p}{q} : \quad -n \leq p \leq n, \quad 0 < q \leq n\}$. Déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
b) Soit $k \geq 1$. Montrer que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable. On pourra par exemple considérer $F_m = \{(n_1, \dots, n_k) : \sum |n_i| \leq m\}$.
c) Soit (A_n) une suite d'ensembles dénombrables, et F_n l'ensemble formé par les n premiers éléments de $A_1, \dots, A_n$. Montrer que

$$\bigcup A_n = \bigcup F_n \quad \text{est dénombrable.}$$

Exercice 3 Soit $f : (n, m) \to 2^n(2m+1)$. Montrer que $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est bijective. S'en servir pour une autre démonstration du fait qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 4 On veut montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable, par un raisonnement pas l'absurde. Supposons donc une suite (a_n) telle que $\{a_n : \ n \geq 1\} = [0, 1]$.

a) Justifier que parmi les intervalles $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, et $[2/3, 1]$ au moins un intervalle ne contient pas a_1. Appelons le I_1.
b) On découpe I_1 à nouveau en trois intervalles de longueur $1/9$. Justifier qu'au moins un de ces intervalles ne contient pas a_2. Appelons le I_2.
c) Ainsi on obtient une suite encastrée d'intervalles I_n telle que $a_n \notin I_n$. Faire un dessin.
d) Montrer que $\bigcap I_n = \{a\}$, puis remarquer une contradiction.

Exercice 5 Pour un ensemble E quelconque on définit $\mathcal{P}(E) := \{A : \ A \subset E\}$.

a) Montrer que si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.
b) Montrer, pour un ensemble E quelconque, que $\mathcal{P}(E)$ est “strictement plus grand” que E dans le sens qu'il n'y a pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$ (Indication: supposer par l'absurde l'existence d'une telle bijection ϕ et considérer $F = \{x : x \notin \phi(x)\}$).

Exercice 6 De l'exercice précédent suit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Montrer que l'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable.

Tribus

Exercice 7 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer toutes les tribus sur Ω.

Exercice 8 Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. On pose

$$\mathcal{T}_x = \{T \in \mathcal{T} : x \in T\} \quad \text{et} \quad P(x) = \bigcap_{T \in \mathcal{T}_x} T$$

a) Montrer que $x \in P(y)$ implique $P(x) \subset P(y)$.
b) Soit $x \in P(y)$. Montrer par l'absurde que $y \in P(x)$. Déduire $P(x) = P(y)$.
c) Soit $\mathcal{P} = \{P(x) : \ x \in \Omega\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partition de Ω.

Exercice 9 Montrer que les ensembles suivants sont des éléments de la tribu $\mathcal{B}$ de Borel. $A = [0, 1)$ $B = \{1, 2\}$ $C = \mathbb{Q}$ $D = [0, 1]$
$E = \{x : \ x$ est négatif et rationnel ou positif et irrationnel$\}$.

Exercice 10 Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la tribu $\mathcal{A} = \{B \cap \mathbb{Q} : \ B \in \mathcal{B}\}$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 11 On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{R}^d$ qui sont dénombrables ou telles que le complémentaire $A^\complement$ est dénombrable.
a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
b) Montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu qui contient tous les singletons $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}^d$.

Mesures

Exercice 12 Les applications suivantes définies sur $\mathcal{T}$, sont-elles des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, où $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \mathbb{N}\backslash\{1\}, \mathbb{N}\}$.
a) $\forall E \in \mathcal{T}, \ \mu(E) = 5$ si $1 \in E, \ \mu(E) = 0$ sinon.
b) $\nu(\{1\}) = 1$ et $\forall E \in \mathcal{T}, \ \nu(E) = 0$ si $E \neq \{1\}$.

Exercice 13 Soit μ une fonction sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, définie par $\mu(A) = \infty$ si A est infini et $\mu(A) = \sum_{k \in A} k^{-2}$ si A est fini. Montrer que μ est additive, mais pas une mesure.

Exercice 14 (La mesure de dénombrement) Soit Ω un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Si $E \subset \Omega$ on pose $\mu(E) = +\infty$ si E est infini et $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E est fini. Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 15 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
a) Que peut-on dire d'une mesure constante sur $(\Omega, \mathcal{A})$?
b) Montrer que si μ et ν sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et si $a \in \mathbb{R}^+$, $\mu + \nu$ et $a\mu$ sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
c) Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer qu'on peut définir une mesure $\mu = \sum_{n \geq 0} \mu_n$.

Exercice 16 (La mesure de Dirac) Sur la tribu borélienne Borel($\mathbb{R}$) de $\mathbb{R}$, on définit δ_a par:

$$\forall A \in \text{Borel}(\mathbb{R}),\ \delta_a(A) = 1 \text{ si } a \in A \text{ et } \delta_a(A) = 0 \text{ si } a \notin A.$$

Montrer que δ_a est une mesure sur Borel($\mathbb{R}$).

Exercice 17 Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu borélienne qui est invariante par translation (i.e. $\mu(x + A) = \mu(A)$, pour tout x) et telle que le cube standard $I = [0, 1)^n$ a pour volume $\mu(I) = 1$. Soit

$$Q := [a_1, b_1) \times \dots [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad V = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

a) Soit $a_i < b_i \in \mathbb{Z}$. Montrer que forcément $\mu(Q) = V$.
b) Soit $a_i < b_i \in \mathbb{Q}$ pour tout i. Écrire $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ et $b_i = \frac{r_i}{q_i}$, puis choisir $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $q_i | q$ pour tout q. S'en servir pour montrer que $\mu(Q) = V$.
c) Déduire par un argument d'approximation rationnelle que $\mu(Q) = V$ pour $a_i < b_i \in \mathbb{R}$.
d) Soit $a_i = b_i$ pour au moins un i. Utiliser la monotonie par rapport à l'inclusion pour montrer que $\mu(Q) = 0$.
e) Déduire $\mu(Q) = V$ pour $a_i \leq b_i \in \mathbb{R}$ si le pavé Q est un produit d'intervalles ouverts, semi-ouverts ou fermés.
f) Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'alors $\mu(\Omega) > 0$.
g) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable, contenue dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mu(A) = 0$. Indications:
   i) Commencer avec le cas que $H = \{a\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et que A est bornée : Montrer que pour $\varepsilon > 0$ il existe un pavé P contenant A de volume $\mu(P) \leq \varepsilon$.
   ii) Enlever l'hypothèse de bornétude de A.
   iii) Généraliser à un hyperplan H quelconque.
h) On considère le cas n=2: soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et

$$\text{graphe}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $\mu(\text{graphe}(f)) = 0$.