Tribus et Mesures (suite)

Exercice 1 *Structure borélienne des points de continuité d'une fonction*
Soit (X,d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une application *quelconque*. On note $B(x,r) = \{y \in X | d(x,y) < r\}$ et on définit *l'oscillation de f en x*, notée $\omega(x)$, par

$$\omega(x) = \inf\{\omega(x,\delta) \ ; \ \delta > 0\} \quad \text{avec} \quad \omega(x,\delta) = \sup\{|f(t) - f(s)| \ ; \ s,t \in B(x,\delta)\}.$$

a) Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega(x) = 0$.
b) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $A_\epsilon = \{x \in X \ ; \ \omega(x) < \epsilon\}$ est un ouvert.
c) En déduire que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts). En particulier c'est un borélien.

Rappel : Soit (A_n) une suite de parties de Ω. On pose

$$\limsup A_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_n \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right).$$

Si (a_n) est une suite de réels, comment est défini $\limsup a_n$ et $\liminf a_n$?

Exercice 2

a) Montrer que $x \in \limsup A_k$ si et seulement si $x \in A_k$ pour une infinité d'indices k ; que $x \in \liminf A_k$ si et seulement si x appartient à tous les A_k sauf peut-être un nombre fini.
b) Soit Ω un ensemble et (A_n) une suite de parties de Ω. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les cas
   — (A_n) est monotone (par rapport à l'ordre partiel d'inclusion)
   — $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$ où $B,\ C$ sont deux parties de Ω.
   — les A_n sont deux à deux disjoints.
c) Dans la suite de l'exercice on suppose que l'on a un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et que pour tout entier n, $A_n \in \mathcal{T}$. Justifier que $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ sont dans $\mathcal{T}$.
d) Montrer que $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ ("propriété de Fatou").
e) On suppose de plus qu'il existe B dans $\mathcal{T}$ tel que $\mu(B) < +\infty$ et pour tout entier n, $A_n \subset B$ (donner un exemple de mesure pour laquelle cette condition est toujours vérifiée). Montrer que $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.
f) Montrer que si l'on suppose à la fois qu'il existe B dans $\mathcal{T}$ tel que $\mu(B) < +\infty$ et pour tout entier n, $A_n \subset B$ et que la suite (A_n) converge (c'est-à-dire $\liminf A_n = \limsup A_n := \lim A_n$) alors la suite $(\mu(A_n))_n$ converge et $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$.

Exercice 3
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$. Qu'en déduit-on pour presque tout x de X ?

Exercice 4
Soit $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ un ensemble et $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b,c,d\}\}$.

a) Trouver $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu sur X engendrée par $\mathcal{F}$. On définit $\mu : \sigma(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}^+$ par : $\mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
b) On définit la famille des ensembles $\mu-$négligeable : $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{P}(X) : \exists B \in \sigma(\mathcal{F}) : N \subseteq B \text{ et } \mu(B) = 0\}$. Décrire cette famille.
c) Maintenant on définit μ^* et μ_* les mesures extérieure et intérieure associée sur $\mathcal{P}(X)$ par : $\mu^*(A) = \inf\{\mu(S) : A \subseteq S \text{ et } S \in \sigma(\mathcal{F})\}$ et $\mu_*(A) = \sup\{\mu(S) : A \supseteq S \text{ et } S \in \sigma(\mathcal{F})\}$. Calculer $\mu^*(\{b,d\}), \mu^*(\{e\}), \mu_*(\{b,d\}), \mu_*(\{e\})$.

d) Trouver la famille $\{A \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(A) > \mu_*(A)\}$.
e) Décrire la famille $\tau(\mathcal{F}) = \{A \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(A) = \mu_*(A)\}$.
f) Montrer que $\tau(\mathcal{F})$ est une tribu qui contient toutes les parties de X de la forme $A \cup N$, où $A \in \sigma(\mathcal{F})$ et N est un élément de $\mathcal{N}$.

Fonctions mesurables

Exercice 5

a) Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble X, montrer que A est un élément de $\mathcal{T}$ si et seulement si l'application $\mathbb{1}_A$ est mesurable de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
b) Toute fonction continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable (en rappeler la preuve). Donner un exemple de fonction mesurable qui n'est pas continue.

Exercice 6

D'après le cours, si f est une application mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $|f|$ est mesurable. Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 7

Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Y et f une application de X dans Y.

a) Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur X qui rende l'application f mesurable de $(X, \mathcal{A})$ sur $(Y, \mathcal{T})$?
b) Montrer que toute application $g\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{T})$ mesurable s'écrit $g = h \circ f$, où
$$h\colon (Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T})$$
est une application mesurable. (indication : commencer par regarder le cas où g est une fonction en escalier).
c) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
    a) Montrer que la plus petite tribu $\mathcal{A}$ qui rende $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable est
    $$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) / A = -A\}.$$
    b) Déterminer alors l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 8

Soit f une fonction définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, à valeurs réelles. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) f est mesurable
b) Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, l'ensemble $f^{-1}([a, b])$ est mesurable.
c) Pour tout intervalle ouvert $]a, b[$, l'ensemble $f^{-1}(]a, b[)$ est mesurable.
d) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]a, +\infty[)$, respectivement $f^{-1}([a, +\infty[)$, est mesurable.
e) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, a[)$, resp. $f^{-1}(]-\infty, a])$, est mesurable.

Exercice 9

Soit $f\ \ (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$
Montrer que g est mesurable. Indication : étudier d'abord le cas $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

a) Montrer que toute fonction monotone de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable (indication : que pensez-vous de l'image réciproque d'un intervalle ?).
b) Montrer que si $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point alors f' est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (indication : f' est-elle la limite d'une suite de fonctions mesurables ?)

Exercice 11
Soit $\mathcal{A}$ une tribu engendrée par une partition $(A_n)_{n\geq 0}$ dénombrable d'un ensemble quelconque non vide X. Montrer qu'une application de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque A_n. (indication : on pourra commencer par montrer que

$$\mathcal{A} = \{\bigcup_{j\in J} A_j,\ J \subset \mathbb{N}\}).$$

Mesure de Lebesgue

Exercice 12
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère une suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$. D'après le cours, si $\mu(A_0)$ est fini, alors $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. En rappeler la démonstration.
Trouver un exemple dans $\mathbb{R}$, muni de la mesure de Lebesgue λ, d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante telle que $\lambda(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n)$.

Exercice 13 *Un ensemble non dénombrable de mesure de Lebesgue nulle*

a) Soit A un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, que vaut sa mesure de Lebesgue ? En déduire une nouvelle preuve de la non dénombrabilité de $[0, 1]$.
b) On considère $C_0 = [0, 1]$ puis on construit par récurrence C_{n+1} en enlevant de chaque composante connexe de C_n l'intérieur de son tiers central. Ainsi $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, représenter C_2 et C_3.
c) Montrer que l'ensemble de Cantor $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est un borélien de mesure de Lebesgue nulle.
d) L'écriture en base 3 ($x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$) met en bijection l'intervalle $[0, 1)$ et l'ensemble des suites $(x_n) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ ne convergeant pas vers 2. Monter que C contient l'ensemble des points de $[0, 1)$ dont l'écriture en base 3 ne comporte pas le chiffre 1.
e) Trouver une application surjective de C dans $[0, 1]$ (penser à l'écriture en base 2). En déduire que C n'est pas dénombrable.
f) On admet que la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ peut être mise en bijection avec $[0, 1]$ (on dit qu'elle a *la puissance du continu*), en utilisant un résultat de la feuille précédente déduire de ce qui précède qu'il existe des sous-ensembles de C qui ne sont pas boréliens.

Exercice 14
a) Soit N un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle, montrer que $\mathbb{R} \setminus N$ est dense dans $\mathbb{R}$ (ind. que peut-on dire de $]a, b[\cap(\mathbb{R} \setminus N)$?). Que pensez-vous de la réciproque ?
b) Construire un fermé A de $[0, 1]$, de mesure de Lebesgue strictement positive et ne rencontrant pas $\mathbb{Q}$. Peut-on faire la même chose si l'on demande à A d'être ouvert ?

Exercice 15 *Construction d'un ensemble non Lebesgue-mesurable*
On partitionne $[0, 1]$ par ses classes d'équivalence modulo $\mathbb{Q}$. L'axiome du choix assure l'existence d'un ensemble $A \subset [0, 1]$ qui contient exactement un représentant de chaque classe. On va montrer, par l'absurde, que A n'est pas mesurable au sens de Lebesgue (exemple de Vitali, 1905). Supposons donc A mesurable, on note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $r \in \mathbb{Q}\cap[-1, 1]$, justifier que $r+A = \{r+a,\ a \in A\}$ est mesurable et $\lambda(r+A) = \lambda(A)$.
b) Montrer que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (r + A) \subset [-1, 2]$$

c) Si $\lambda(A) = 0$ prouver que $\lambda\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (r + A)\right) = 0$. En déduire une contradiction.
d) Montrer que si r et s sont deux rationnels distincts alors $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$. En déduire à nouveau une contradiction si l'on suppose $\lambda(A) > 0$.

Exercice 16

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue λ-presque partout (c'est-à-dire continue sauf sur un ensemble de mesure nulle pour λ). L'espace $\mathbb{R}$ *de départ* est muni de la tribu de Lebesgue, l'espace $\mathbb{R}$ *d'arrivée* est muni de la tribu de Borel.
   — On considère O un ouvert de $\mathbb{R}$ et on note $A = f^{-1}(O)$, montrer que les points de $A \setminus \mathring{A}$ sont des points de discontinuité de f.
   — En déduire que f est mesurable.

b) Une fonction continue presque partout est-elle la même chose qu'une fonction égale presque partout à une fonction continue ?

c) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ montrer que si elles sont égales λ-presque partout alors elles sont égales.

Exercice 17

Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_k^n := f^{-1}\left(\left[\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{k}{2^n}\right[\right) \quad k = 1, \dots,\ n2^n \quad \text{et} \quad F_n := f^{-1}([n, +\infty]),$$

puis

$$f_n := n\, \mathbb{1}_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \tfrac{k-1}{2^n}\, \mathbb{1}_{E_k^n}.$$

a) Pour $f(x) = |x|$, expliciter f_1 et f_2.

b) Montrer dans le cas général que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f$.

c) Montrer que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

d) Montrer que la convergence est même uniforme si f est supposée bornée.

Exercice 18

Soit $X = \mathbb{Z}$ et $A_1 = \{n \in X : n = 2m \text{ pour } m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$; $A_2 = \{n \in X : n = 2m+1 \text{ pour } m \in \mathbb{Z}\}$; $\mathcal{F} = \{A_1, A_2\}$.

a) Trouver $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu sur X engendrée par $\mathcal{F}$.

b) Les fonctions suivantes sont-elles mesurables de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(X, \sigma(\mathcal{F}))$? de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$?
   i) $f_1(x) = x^2$
   ii) $f_2(x) = x + 1$
   iii) $f_3(x) = 4$
   iv) $f_4(x) = 2x$
   v) $f_5(x) = |x|$.

c) Décrire les fonctions en escalier mesurables de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ puis les fonctions mesurables de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.