Année universitaire 2018-2019
Licence 3 de mathématiques
Intégration - Feuille 4

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $F(n) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \geqslant n\})$.

a. Établir la formule $\displaystyle\int_X \lfloor f \rfloor \mathrm{d}\mu = \sum_{n \geqslant 1} F(n)$.

b. Démontrer que si f est intégrable, alors $F(n)n$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Posons $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant n\}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \int_{A_n} f^2 \mathrm{d}\mu$ converge.

Exercice 3

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(α) il existe une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $X = \displaystyle\bigcup_{n \geqslant 0} A_n$;
(β) il existe une application $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ intégrable.

Exercice 4

a. Vérifier que l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est intégrable.

b. Établir la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + 1}$; on pourra développer $\dfrac{u}{1-u}$ en série avec $u = e^{-x}$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

a. Démontrer que si f est croissante, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f' \mathrm{d}\lambda \leqslant f(b) - f(a)$; on pourra utiliser le lemme de Fatou.

b. Prouver que si f' est bornée, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f' \mathrm{d}\lambda = f(b) - f(a)$.

Exercice 6

Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une application intégrable.

a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que f soit bornée sur A et que $\displaystyle\int_{X \smallsetminus A} |f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$; *indication :* on pourra considérer $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant n\}$ pour n assez grand.

b. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $B \in \mathcal{T}$ vérifiant $\mu(B) < \alpha$, on a $\displaystyle\int_B |f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

c. Supposons $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, \lambda)$. Prouver que l'application $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\displaystyle\int_{[0,x]} f \mathrm{d}\lambda$ est uniformément continue.

Exercice 7

a. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Soit $a \in X$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $L^1(X, \mathcal{T}, \delta_a)$?

b. L'application $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$ est-elle équivalente dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ à une application continue ?

Exercice 8

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. Soit $f \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers f presque partout et que $(\|f_n\|_{L^1})_{n \geqslant 0}$ converge vers $\|f\|_{L^1}$. Démontrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers f dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$; on pourra considérer $g_n = |f_n - f| + |f| - |f_n|$.

Exercice 9

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Notons S l'image dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ de l'ensemble des applications $X \to \mathbb{R}$ intégrables en escalier. Montrer que S est dense dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 10

Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Posons $A = \{x \in]0,1[\mid f'(x) = 0\}$. Prouver que $f(A)$ est un borélien, puis que $f(A)$ est négligeable ; on pourra considérer $A_n = \{x \in]0,1[\mid |f'(x)| < \frac{1}{n}\}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.