Année universitaire 2018-2019
Licence 3 de mathématiques
Intégration - Feuille 5

Exercice 1

a. Soit t un réel > 0. Vérifier que l'application $f_t : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\dfrac{\sin x}{x} e^{-xt}$ est intégrable.

b. Montrer que l'application $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à t associe $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}x$ est dérivable et déterminer sa dérivée ; *indication :* prouver que F est dérivable sur $]\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$.

c. En déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

a. Démontrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

b. En considérant la dérivée de $f+g$, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 3

a. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(y+1)(x^2y+1)}$.

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \mathrm{d}x}{x^2-1}$.

Exercice 4

a. Vérifier que l'application $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $e^{-y}\sin(2xy)$ est intégrable.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}\mathrm{d}y$.

Exercice 5

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on pose $f(x, y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Comparer $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

et $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$; *indication :* considérer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}$.