Dénombrabilité

Exercice 1 Soit Ω un ensemble et $F_n \subset \Omega$, $n \geq 1$ une suite d'ensembles. Construire des parties $G_n \subset \Omega$ telles que

a) $\bigcup F_n = \bigcup G_n$
b) Pour tout $n \neq k$, on a $G_n \cap G_k = \emptyset$.

Exercice 2 Soit (F_n) une suite d'ensembles finis (et non-vides) de Ω. Montrer que $\bigcup F_n$ est dénombrable (on pourra se servir de la question précédente). Applications:

a) Soit $\mathbb{Q}_n = \{\frac{p}{q} : \quad -n \leq p \leq n, \quad 0 < q \leq n\}$. Déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
b) Soit $k \geq 1$. Montrer que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable. On pourra par exemple considérer $F_m = \{(n_1 \ldots n_k) : \sum |n_i| \leq m\}$.
c) Soit (A_n) une suite d'ensembles dénombrables, et F_n l'ensemble formé par les n premiers éléments de $A_1 \ldots A_n$. Montrer que

$$\bigcup A_n = \bigcup F_n \quad \text{est dénombrable.}$$

Exercice 3 Soit $f : (n, m) \to 2^n \, \frac{2m+1}{2}$. Montrer que $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bijective. S' en servir pour une autre démonstration du fait qu'une union dénombrables d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 4 On veut montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable,par un raisonnement pas l'absurde. Supposons donc une suite (a_n) telle que $\{a_n : \ n \geq 1\} = [0, 1]$.

a) Justifier que parmi les intervalles $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, et $[2/3, 1]$ au moins un intervalle ne contient pas a_1. Appelons le I_1.
b) On découpe I_1 à nouveau en trois intervalles de longueur $1/9$. Justifier qu' au moins un de ces intervalles ne contient pas a_2. Appelons le I_2.
c) Ainsi on obtient une suite encastré d'intervalles I_n telle que $a_n \notin I_n$. Faire un dessin.
d) Montrer que $\bigcap I_n = \{a\}$, puis remarquer une contradiction.

Exercice 5 Pour un ensemble E quelconque on définit $\mathcal{P}(E) := \{A : \ A \subset E\}$.

a) Montrer que si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.
b) Montrer, pour un ensemble E quelconque, que $\mathcal{P}(E)$ est 'strictement plus grand' que E dans le sens qu'il n'y a pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$ (Indication: supposer par absurde l'existence d'une telle bijection ϕ et considérer $F = \{x : \ x \notin \phi(x)\}$).

Exercice 6 De l'exercice précédent suit que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. Montrer que l'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable.

Tribus

Exercice 7 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer tous les tribus sur Ω.

Exercice 8 Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. On pose

$$\mathcal{T}_x = \{T \in \mathcal{T} : x \in T\} \quad \mathrm{et} \mathrm{P}(x) = \bigcap_{T \in \mathcal{T}_x} T$$

a) Montrer que $x \in P(y)$ implique $P(x) \subset P(y)$.
b) Soit $x \in P(y)$. Montrer par l'absurde que $y \in P(x)$. Deduire $P(x) = P(y)$.
c) Soit $\mathcal{P} = \{P(x) : x \in \Omega\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partition de Ω.

Exercice 9 Montrer que les ensembles suivants sont des éléments de la tribu $\mathcal{B}$ de Borel. $A = [0, 1)$ $B = \{1, 2\}$ $C = \mathbb{Q}$ $D = [0, 1]$ $E = \{x : x$ est négatif et rationnel ou positif et irrationnel$\}$.

Exercice 10 Soit $\mathcal{B}$ la tribu Borelienne sur $\mathbb{R}$. Que peut on dire de la tribu $\mathcal{A} = \{B \cap \mathbb{Q} : B \in \mathcal{B}\}$ sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 11 On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{R}^d$ qui sont au plus dénombrables ou telles que le complémentaire $A^{\complement}$ est au plus dénombrable. On rappelle qu'être "au plus dénombrable" signifie fini ou dénombrable.
a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
b) Montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu qui contient tous les singletons $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}^d$.

Mesures (début)

Exercice 12 On considère dans $\mathbb{Q}$ les "intervalles" $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Est-ce qu'on peut définir une mesure σ-additive μ sur $\mathbb{Q}$ telle que $\mu(\langle a, b\rangle) = b - a$?

Exercice 13 Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\lambda_d(\Omega) > 0$.

Exercice 14 Soit $D = \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que $\lambda_2(D) = 0$.

Exercice 15 Justifier que l'aire d'un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est égale à $(b-a)(d-c)$. (on pourra se servir du thm 1.3.6 du cours).

Exercice 16 Soit $(q_n)_{n \geq 0}$ une énumération de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, et $r \in (0, 1)$. On considère

$$O_r = \left(\bigcup_n (q_n - r2^{-n}, q_n + r2^{-n}) \right)$$

Montrer que O_r est un ouvert dense dont la mesure de Lebesgue est au plus r. L'ensemble $K_r = [0, 1] \backslash O_r$ est aussi troublant: il 'sagit d'un compact qui ne contient aucun rationnel et dont la mesure de Lebesgue est au moins $1 - r$!