Exercice 1 Soient $(X, \mathcal{A})$ un ensemble avec tribu $\mathcal{A}$ et $A \subset X$. Montrer que la fonction caractéristique χ_A est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Exercice 2 Les applications suivantes définies sur $\mathcal{T}$, sont-elles des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, où $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \mathbb{N}\backslash\{1\}, \mathbb{N}\}$.

a) $\forall E \in \mathcal{T},\ \mu(E) = 5$ si $1 \in E,\ \mu(E) = 0$ sinon.

b) $\nu(\{1\}) = 1$ et $\forall E \in \mathcal{T},\ \nu(E) = 0$ si $E \neq \{1\}$.

Exercice 3 Soit μ une fonction sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, définie par $\mu(A) = \infty$ si A est infini et $\mu(A) = \sum_{k \in A} k^{-2}$ si A est fini. Montrer que μ est additive, mais pas une mesure.

Exercice 4 (La mesure de dénombrement) Soit Ω un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Si $E \subset \Omega$ on pose $\mu(E) = +\infty$ si E est infini et $\mu(E) = \mathrm{card}(E)$ si E est fini. Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 5 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

a) Que peut on dire d'une mesure constante sur $(\Omega, \mathcal{A})$?

b) Montrer que si μ et ν sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et si $a \in \mathbb{R}^+$, $\mu + \nu$ et $a\mu$ sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

c) Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer qu'on peut définir une mesure $\mu = \sum_{n \geq 0} \mu_n$.

Exercice 6 (La mesure de Dirac) Sur la tribu Borélienne Borel($\mathbb{R}$) de $\mathbb{R}$, on définit δ_a par:

$$\forall A \in \mathrm{Borel}(\mathbb{R}),\ \delta_a(A) = 1 \text{ si } a \in A \text{ et } \delta_a(A) = 0 \text{ si } a \notin A.$$

Montrer que δ_a est une mesure sur Borel($\mathbb{R}$).

Exercice 7

a)* Soit $\mathcal{F}$ un système de parties d'un ensemble Y et $f : X \to Y$ une application. Montrer que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))$. Indication pour "$\subseteq$": considérer $\mathcal{A} = \{A \subset X :\ f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{F}))\}$; montrer $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est une tribu, puis conclure.

b) Soit X et Y des espaces topologiques, soit f une application continue de X dans Y. Montrer que f est mesurable.

Exercice 8 Soit f une application mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $|f|$ est mesurable. Qu'en est il pour la réciproque?

Exercice 9 Soit f une fonction définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, à valeurs réelles ($\mathbb{R}$ étant muni avec la tribu Borelienne). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a) f est mesurable
b) Pour tout intervalle fermé $[a,b]$, l'ensemble $f^{-1}([a,b])$ est mesurable.
c) Pour tout intervalle ouvert (a,b), l'ensemble $f^{-1}((a,b))$ est mesurable.
d) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}((a,+\infty))$, respectivement $f^{-1}([a,+\infty))$, est mesurable.
e) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}((-\infty,a))$, respectivement $f^{-1}((-\infty,a])$, est mesurable.

Exercice 10 Montrer que toute fonction monotone de $(\mathbb{R}, \text{Borel}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \text{Borel}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Exercice 11 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et μ une mesure σ–finie sur un espace mesurable (Ω, Borel) autrement dit, il existe une suite croissante $(\Omega_n)_{n\geq 0}$ telle que $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ et $\mu(\Omega_n) < \infty$ pour tout n.
a) Soit $S_{n,k} = \{x \in \Omega_n : \mu(\{x\}) > 1/k\}$. Montrer que $S_{n,k}$ est fini.
b) Déduire que l'ensemble $D_n = \{x \in \Omega_n : \mu(\{x\}) > 0\}$ est au plus dénombrable.
c) En déduire que l'ensemble $D = \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 0\}$ est au plus dénombrable.
d) Montrer qu'il existe une (et une seule) représentation de la mesure $\mu = \mu_c + \mu_d$,, où μ_c est une mesure continue (c'est a dire, $\mu(\{x\}) = 0 \forall x$) et μ_d une mesure discrète donnée par $\mu_d = \sum_j c_j \delta_{x_j}$ avec $x_j \in D$ et $c_j > 0$. Indication: poser $\mu_d(A) = \mu(A \cap D)$ ...

Exercice 12 Soit $I_0 = [0,1]$. On forme I_1 de I_0 en enlevant le tiers central de I_0, c'est à dire

$$I_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Ensuite, on forme I_2 en enlevant le tiers central de chaque composante connexe de I_1, ce qui donne

$$I_2 = \left[0, \tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \quad \cup \quad \left[\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9}, 1\right]$$

On itère la procédure. Voici un esquisse des premières six itérations:

Soit $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 0} I_n$ l'ensemble de Cantor.
a) $\mathcal{C}$ est non-vide! Donner par ex. 4 points dans $\mathcal{C}$.
b) Monter que $\mathcal{C}$ est un ensemble infini.
c) Est-ce que C est un ensemble Borelien?
d) Montrer que $\lambda(I_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Déduire $\lambda(\mathcal{C}) = 0$.
e) Soit X un espace vectoriel et $A, B \subset X$ deux ensembles dénombrables. Montrer que $A + B = \{a + b : \ a \in A, B \in B\}$ est dénombrable (indication: considérer $\phi : X \times X \to X$, $\phi(x,y) = x + y$).
f) Soit $Q_n = I_n \times I_n$, $Q = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, et $D : x + y = a$ avec $a \in [0,2]$.
Étudier $D \cap I_n$ pour montrer que $D \cap Q \neq \emptyset$ (indication: utiliser la compacité!).
Déduire que $\mathcal{C} + \mathcal{C} = [0,2]$. Comparer avec (d). Est-ce que $\mathcal{C}$ est dénombrable?