Exercice 1 Soit $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Existe-t-il une majoration intégrable pour les fonctions suivantes? Si oui trouver la limites des intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$.

$$f_n = \sqrt{n}\,\mathbb{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}, \quad g_n = \frac{n}{\log n}\,\mathbb{1}_{[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{n}]}, \quad h_n(x) = \frac{n^2 x\, e^{-nx^2}}{1+x^2}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \qquad n \geq 1$$

$$k_n(x) = \frac{nx\sin x}{1+|nx|^\alpha}, \quad l_n = k_n \mathbb{1}_{(0,1)}, \qquad \alpha \geq 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Exercice 2 Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \arctan(1+x^2/n)\tfrac{dx}{1+x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\infty} (1+(x/n))^{-n}\sin(x/n)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\infty} x^k(1-(x/n))^{-n}dx \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{\infty} \tfrac{n}{(1+n^2x^2)}\, dx \text{ pour } a > 0$$

$$.\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\infty} n\sin(x/n)[x(1+x^2)]^{-1}dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{\infty} ne^{-nx}\sin(1/x)dx$$

Exercice 3 Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)e^{-n\sin^2 x}dx.$$

Exercice 4 Soit $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que $f_n \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Cependant, $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$. Est-ce un contre-exemple au théorème de convergence dominé?

Exercice 5 Soit $\lambda(X) < \infty$, et (f_n) une suite de fonctions intégrables sur X qui converge uniformement vers f. Montrer que f est intégrable et que $\int_X f(x)\,dx = \lim \int_X f_n(x)\,dx$.

Exercice 6 Soit $p > 0$. Montrer que

$$\int_0^1 \tfrac{x^p |\ln(x)|}{1-x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{(p+k)^2}$$

Exercice 7 Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx < \infty.$$

Déduire que $g(x) := \sum_n |f_n(x)|$ est intégrable. Déduire que la série $\sum_n f_n(x)$ converge presque partout absolument. Montrer que g est un majorant pour la suite de fonctions

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$$

et déduire finalement

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_n f_n(x) \Big)\,dx$$

Exercice 8 Soit $0 < a < b$ et $f_n(x) = a\,e^{-nax} - b\,e^{-nbx}$. Montrer que

$$A := \int_0^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Big)\,dx \quad \text{et} \quad B := \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \Big)$$

sont bien définis; a-t-on égalité?

Exercice 9 Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Montrer que F est continue.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, dérivable sur $[a, b]$ tel que la dérivée $f'(x)$ est bornée sur $[a, b]$. Montrer que f' est intégrable sur $[a, b]$ et que

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

Indication: considérer $f_n(x) = \mathbb{1}_{[a, b-\frac{1}{n}]}(x) \cdot n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$.