Mesures et fonctions mesurables

Tout espace topologique sera muni de la tribu Borélienne sauf si précisé autrement.

Exercice 1 Soient $(X, \mathcal{A})$ un ensemble avec tribu $\mathcal{A}$ et $A \subset X$. Sous quelle condition la fonction caractéristique χ_A est-elle mesurable?

Exercice 2 Si X et Y sont des espaces topologiques, soit f une application continue de X dans Y.

a) Montrer que f est mesurable.
b) Si $X = Y = \mathbb{R}$, trouver une fonction mesurable de X dans Y, non continue.

Exercice 3 Soit f une application mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $|f|$ est mesurable. Qu'en est il pour la reciproque?

Exercice 4 Soit X un ensemble. Soient Y un espace topologique et f une application de X dans Y. Quelle est la plus petite tribu sur X qui rende l'application f mesurable?

Exercice 5 Soit f une fonction définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, à valeurs réelles. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a) f est mesurable
b) Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, l'ensemble $f^{-1}([a, b])$ est mesurable.
c) Pour tout intervalle ouvert (a, b), l'ensemble $f^{-1}((a, b))$ est mesurable.
d) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}((a, +\infty))$, respectivement $f^{-1}([a, +\infty))$, est mesurable.
e) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}((-\infty, a))$, respectivement $f^{-1}((-\infty, a])$, est mesurable.

Exercice 6 Montrer que toute fonction monotone de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Exercice 7 Soit $\mathcal{A}$ une tribu engendrée par une partition $(A_n)_{n \geq 0}$ dénombrable d'un ensemble quelconque non vide X. Montrer qu'une application de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque A_n.

Exercice 8 On considère l'espace $M(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles mesurables sur un espace $(X, \mathcal{A})$.

a) Montrer que si f et g sont mesurables, (f, g) est mesurable sur X dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.
b) Montrer que $M(X, \mathbb{R})$ est une algèbre.

c) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles, mesurables sur $(X, \mathcal{A})$. Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables :

$$\sup(f_n),\ \inf(f_n),\ \limsup f_n,\ \liminf f_n, \lim f_n \quad \text{si cette limite existe.}$$

Exercice 9 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

a) Que peut on dire d'une mesure constante sur $(\Omega, \mathcal{A})$?

b) Montrer que si μ et ν sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et si $a \in \mathbb{R}^+$, $\mu + \nu$ et $a\mu$ sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

c) Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer qu'on peut définir une mesure $\mu = \sum_{n\geq 0} \mu_n$.

Exercice 10 Les applications suivantes définies sur $\mathcal{T}$, sont-elles des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$, où $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \mathbb{N}\backslash\{1\}, \mathbb{N}\}$.

a) $\forall E \in \mathcal{T},\ \mu(E) = 5$ si $1 \in E,\ \mu(E) = 0$ sinon.

b) $\nu(\{1\}) = 1$ et $\forall E \in \mathcal{T},\ \nu(E) = 0$ si $E \neq \{1\}$.

Exercice 11 (La mesure de Dirac) Sur la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$, on définit δ_a par:

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \delta_a(A) = 1 \text{ si } a \in A \text{ et } \delta_a(A) = 0 \text{ si } a \notin A.$$

Montrer que δ_a est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (La mesure de dénombrement) Soit Ω un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Si $E \subset \Omega$ on pose $\mu(E) = +\infty$ si E est infini et $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E est fini. Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 13 Soit X un ensemble non dénombrable et soit

$$\mathcal{A} = \{A \subset X,\ A \text{ ou } A^{\complement} \text{ au plus dénombrable}\}.$$

On rappelle que $\mathcal{A}$ est une tribu (voir feuille 2). Pour $A \subset \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $\mu(A) = 1$ si $A^{\complement}$ est au plus dénombrable. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 14 Soit $E = \{x_n,\ n \geq 1\}$ un ensemble de réels tous distincts. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $\overline{\mathbb{R}}^+$; montrer qu'il existe une mesure μ sur la tribu des Boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ telle que :

a) $\mu(\{x_n\}) = \lambda_n$,

b) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ A \cap E = \emptyset \Longrightarrow \mu(A) = 0$,

c) Montrer que $\mu = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \delta_{x_n}$.

Exercice 15 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$.

a) On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante; montrer que $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

b) On suppose que la suite est décroissante et que $\mu(A_0)$ est fini. Montrer que $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.

c) Trouver un exemple dans $\mathbb{R}$, muni de la mesure de Lebesque λ, d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante telle que $\lambda(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \lim_{n\to+\infty} \lambda(A_n)$.

Exercice 16 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Exercice 17 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Un élément $A \in \mathcal{A}$ est un μ–atome si:

(A) $0 < \mu(A) < +\infty$.

(B) $\forall B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Longrightarrow (\mu(B) = 0 \ \text{ ou } \ \mu(A\backslash B) = 0)$.

Déterminer les μ–atome dans les deux cas suivants:

(i) $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Dirac en 0.

(ii) $(X, \mathcal{P}(X))$ muni de la mesure de dénombrement.

b) Soit A une partie mesurable de X telle que $0 < \mu(A) < +\infty$ et que ni A ni aucune partie mesurable de A n'est un μ–atome. Montrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathcal{A},\ B \subset A \text{ et } 0 < \mu(B) < \epsilon.$$

Indication: Montrer qu'il existe $B_1 \in \mathcal{A},\ B_1 \subset A$ et $0 < \mu(B_1) \leq \frac{\mu(A)}{2}$.

Rappel: Soit (A_n) une suite de parties de Ω. On pose

$$\limsup A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k \right) \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\bigcap_{k\geq n} A_k \right).$$

Exercice 18 Soit Ω un ensemble et (A_n) une suite de parties de Ω. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les cas

a) (A_n) est monotone (par rapport à l'ordre partiel d'inclusion)

b) $A_n \in \{B, C\}$ selon la parité de n où B, C sont deux parties de X.

c) les A_n sont deux à deux disjoints.

Exercice 19* Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini (i.e. $\mu(\Omega) < +\infty$). Pour $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}$ on définit la différence symétrique $A\Delta B$ de A et B: $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

a) On définit sur $\mathcal{A}$ la relation :

$$A \sim B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(A\Delta B) = 0.$$

Montrer qu'on définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.

b) On note $X := \mathcal{A}/\sim$ l'ensemble quotient et par $[A]$ la classe d'équivalence de A. Soit $d([A], [B]) = \delta(A, B)$ où $\delta(A, B) := \mu(A\Delta B)$. Montrer que (X, d) est un espace métrique.

c) Soit $([A_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X et A_n un représentant de $[A_n]$. Montrer qu'il existe une sous-suite extraite $B_k = A_{\phi(k)}$ telle que $\sum_{k\geq 1} \delta(B_k, B_{k+1}) < +\infty$.

d) On pose $N = \limsup(B_k \Delta B_{k+1})$. Montrer que N est de mesure nulle et que $N = \limsup(B_k) \setminus \liminf(B_k)$.

e) En déduire que (X, d) est un espace métrique complet.

Exercice 20 Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Trouver des Boréliens de $\mathbb{R}$ dont la frontière est de mesure non nulle.

b) Trouver un Borélien A de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(\mathring{A}) < \lambda(A) < \lambda(\overline{A})$.

c) Soit $\Omega = \cup_{n\geq 0} \left(r_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$, où $\mathbb{Q} = \{r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots\}$. Montrer que Ω est un ouvert de frontière de mesure non nulle et que $\epsilon \leq \lambda(\Omega) \leq 2\epsilon$. En déduire l'existence d'un fermé de $\mathbb{R}$ de mesure non nulle, ne contenant aucun intervalle ouvert.

Exercice 21 Soit μ une mesure finie sur la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (une telle mesure est dite continue).

a) Montrer que la fonction $f(x) := \mu((-\infty, x])$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\mu(\mathcal{B}(\mathbb{R})) := \{\mu(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = [0, \mu(\mathbb{R})]$.

c) Donner un exemple d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dont l'ensemble des valeurs $\mu(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ n'est pas un intervalle.

Exercice 22 Soit μ une mesure σ–finie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ autrement il existe une suite croissante $(\Omega_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{A}$ tous de mesure finie et $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$.

a) Soit $n \geq 0$, montrer que l'ensemble $D_n = \{x \in \Omega_n : \mu(x) > 0\}$ est au plus dénombrable.

b) En déduire que l'ensemble $D = \{x \in \Omega : \mu(x) > 0\}$ est au plus dénombrable.

c) Montrer qu'il existe une et une seule représentation de la mesure μ:

$$\mu = \mu_c + \mu_d,$$

où μ_c est une mesure continue et μ_d une mesure discrète donnée par $\mu_d = \sum_j c_j \delta_{x_j}$ avec $x_j \in D$ et $c_j > 0$.

Exercice 23 Soit μ une fonction sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, définie par $\mu(A) = \infty$ si A est infini et $\mu(A) = \sum_{k\in A} k^{-2}$ si A est fini. Montrer que μ est additive, mais pas une mesure.

Exercice 24 Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que $f = g$ λ–p.p. si et seulement si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.