

Exercice 1 Soit $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$.

- Déterminer $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$.
- Soit μ la mesure de Dirac au point c et soient μ^* et μ_* les mesures extérieures et intérieures associées à μ sur $\mathcal{P}(X)$, i.e.

$$\mu^*(A) := \inf \{ \mu(S) : A \in \mathcal{A} \text{ et } A \subseteq S \} \quad \text{et} \quad \mu_*(A) := \sup \{ \mu(S) : A \in \mathcal{A} \text{ et } S \subseteq A \}.$$

- Calculer $\mu^*(\{b, d\})$ et $\mu^*(\{e\})$ puis $\mu_*(\{b, d\})$ et $\mu_*(\{e\})$
- Déterminer $\{A \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(A) > \mu_*(A)\}$.
 - Quelle est la complétion de \mathcal{A} par rapport à μ ?

Exercice 2 Soit $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{Borel})$ une fonction mesurable et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est mesurable. Indication: étudier d'abord le cas $f(x) = x$ sur \mathbb{R} .

Exercice 3 Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}_+, \text{Borel})$ une application mesurable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_k^n := f^{-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right) \quad k = 0 \dots n 2^n \quad \text{et} \quad F_n := f^{-1}([n, \infty)),$$

puis

$$f_n := n \mathbb{1}_{F_n} + \sum_{k \leq n 2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{E_k^n}.$$

- Pour $f(x) = |x|$, expliciter f_1, f_2 et f_3 .
- Montrer dans le cas général que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots \leq f$.
- Montrer que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.
- Montrer que la convergence est même uniforme si f est supposée bornée.

Exercice 4 Soit $X = \mathbb{Z}$ et A_1 la partie des nombres pairs non nuls de X et A_2 la partie de X des nombres impairs.

- Déterminer $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1, A_2\})$.
- Discuter la mesurabilité des fonctions

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x + 1, \quad f_3(x) = 4, \quad f_4(x) = 2x, \quad \text{et} \quad f_5(x) = |x|,$$

- vues comme fonctions sur (X, \mathcal{A}) et vues comme fonctions $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{Borel})$.
- Décrire l'ensemble des fonctions étagées, respectivement des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{Borel})$?