Exercice 1 Soit $f : (\Omega, \tau) \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable et integrable sur Ω. On pose $E_n = \{f \geq n\}$. Soit λ la mesure de Lebesgue.

a) Soit $f_n = n\, \mathbb{1}_{E_n}$. Montrer $\int_\Omega f_n \, d\lambda < +\infty$.

b) En déduire la valeur $\lambda(\{f = +\infty\}) = \lambda(\cap_{n\in\mathbb{N}}\{f \geq n\})$.

Exercice 2 Soient λ_2 la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ et $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite, montrer que $\lambda_2(D) = 0$.

Exercice 3 Soit $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de dénombrement et $f(n) = 3^{-n}$. Calculer

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_d$$

Exercice 4 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x).$$

a) Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $(f_n)_{k=1}^\infty$ est une suite croissante de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$. Trouver un équivalent (presque partout) de la limite.

b) Démontrer que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2k}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

c) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$

d) De la même façon, considérer $f_k(x) = (-1)^k x^{2k}(1-x)$ pour déterminer la valeur de la somme:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Exercice 5 Soit $f_n : (X, \tau) \to ([0, +\infty], \text{Borel})$ mesurable $(n \in \mathbb{N})$. On pose:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in X).$$

Montrer que $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n d\mu$. En déduire que, si $a_{ij} \geq 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Exercice 6 Soit $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ converge, déduire que $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} -t^n \ln(t)$ pour $t \in [0,1]$. Déduire que f est intégrable sur $(0,1)$ et

$$\int_{(0,1)} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}.$$

Il n'est pas demandé d'évaluer cette série!

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ décroissante et intégrable avec $\int_0^\infty f(t)\, dt > 0$.

a) Montrer que pour $h > 0$,

$$\int_h^\infty f(t)\, dt \leq h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) \leq \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

b) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \qquad \text{quand } x \to 1-$$

(on pourra poser $x = e^{-t^2}$).

Exercice 8 Soit $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ intégrable. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} f(x)\, dx$. Déduire que si f est intégrable, positive et décroissante, alors $\lim_{n\to\infty} nf(n) = 0$.

Exercice 9 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction: $g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n)}(x^2)(1 - \frac{x^2}{n})^n$.

a) Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la limite $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ existe.

b) Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ pour tout $x \in D$.

c) Trouver un majorant intégrable $g(x) \geq g_n(x)$ pour tout x, déduire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(x) dx.$$

(on pourra utiliser $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ sans le démontrer).

Exercice 10 Soit $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Existe-t-il une majoration intégrable pour les fonctions suivantes? Si oui trouver la limites des intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$.

$$f_n = \sqrt{n}\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}, \quad g_n = \frac{n}{\log n}\, \mathbb{1}_{[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{n}]}, \quad h_n(x) = \frac{n^2 x\, e^{-nx^2}}{1+x^2} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \qquad n \geq 1$$

$$k_n(x) = \frac{nx \sin x}{1 + |nx|^\alpha}, \quad l_n = k_n \mathbb{1}_{(0,1)}, \qquad \alpha \geq 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Exercice 11 Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Soit $S \subset \mathbb{C}$ un ensemble fermé tel que les moyennes

$$M_A(f) = \tfrac{1}{\mu(A)} \int_A f\, d\mu$$

appartiennent à S pour tout $A \in \mathscr{A}$. Déduire $f(x) \in S$ pour μ–presque tout x.
Indication: montrer que par l'absurde que $A = f^{-1}(B(x_0, r))$ est de mesure nulle si $B(x_0, r) \cap S = \emptyset$ en considérant $|M_A(f) - x_0|$.

Exercice 12 Soit $0 < a < b$ et $f_n(x) = a\, e^{-nax} - b\, e^{-nbx}$. Montrer que

$$A := \int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\Big)\, dx \quad \text{et} \quad B := \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_0^\infty f_n(x)\, dx\Big)$$

sont bien définis; a-t-on égalité?

Exercice 13 Montrer que $f(t) = e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit I l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$.

a) Effectuer un changement de variables, $t = y\, x$ pour obtenir $I = \int_{\mathbb{R}} |y|\, e^{-x^2 y^2}\, dx$.
b) Montrer

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y|\, e^{-(1+x^2)y^2}\, dx\, dy,$$

puis déduire du théorème de Fubini que $I^2 = 2\pi$.

Exercice 14 Pour $t > 0$ soit $f(t) = \sin(t)/t$.

1. Montrer que $f \notin L^1(\mathbb{R}_+^*)$.

2. On souhaite calculer la valeur de l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty \tfrac{\sin(t)}{t}\, dt = \lim_{n\to\infty} I_n \quad \text{où} \quad I_n = \int_0^n \tfrac{\sin(t)}{t}\, dt.$$

Montrer que (I_n) est une suite de Cauchy. Pour établir la valeur de la limite on fait un détour: soit $\phi(t, x) = e^{-t\, x} \sin(t)$.

a) Pour $t > 0$, calculer $\int_0^\infty \phi(t, x)\, dx$
b) Pour $x > 0$, calculer $\int_0^n \phi(t, x)\, dt$.
c) Justifier que $\phi \in L^1((0, n) \times (0, \infty))$.
d) Déduire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_0^n e^{-t\, x} \sin(t)\, dt\, dx \quad = \quad \tfrac{\pi}{2},$$

puis conclure.