Le théorème de Fejér et quelques conséquences ...

Exercice 1 Montrer que $\sum_{k=-m}^{m}(n+1-|k|)e^{iks} = \left(\sum_{l=0}^{m} e^{i(l-m/2)s}\right)^2$

Exercice 2 En déduire l'égalité

$$K_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)s/2)}{\sin(s/2)}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{k=-m}^{m}(n+1-|k|)e^{iks} \qquad (s \neq 0)$$

et on pose $K_n(0) = \frac{1}{n+1}$ (indication: chercher une somme géométrique finie).

Exercice 3 Montrer

(a) $K_n(s) \geq 0$ pour tout $s \in [-\pi, \pi]$

(b) pour tout $\delta > 0$, on a $K_n(s) \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$

(c) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1$

Exercice 4 On suppose $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit

$$f_n = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt$$

le n-ième coefficient de Fourier de f. Le but est de montrer que si f est continue dans le point $t \in [-\pi, \pi]$, alors

$$S_n(f,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-n}^{n} f_n e^{ikt} \to f(t) \qquad (n \to \infty)$$

(ceci est le théorème de Fejér). Voici l'heuristique de la démonstration: soit $\delta > 0$ très petit et n très large. Alors

$$\sigma_n(f,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\, ds \approx \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t-s)\, ds$$

(puisque presque toute la masse de K_n est concentré autour de 0 par (b) et (c) de l'exercice précédent). La fonction f est continue en t et donc a peu près constante sur $[t-\delta, t+\delta]$. Ainsi,

$$\sigma_n(f,t) \approx \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t-s)\, ds \approx \tfrac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)\, ds\right) f(t) \approx \tfrac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\, ds\right) f(t) = f(t)$$

Trouver une démonstration rigoureuse du théorème de Fejér (indic: choisir d'abord le δ, ensuite le n suffisamment grand).

Exercice 5 Soit $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Montrer que $\sigma_n(f,t) \to f$ en norme L^1 (notation de l'exercice précédent).
En déduire que si tout les coefficients de Fourier f_n de f sont nuls, alors $f = 0$ (utiliser la structure du noyau K_n, voir questions 1 et 2) .

On admettra que la translation est une opération (fortement) continue sur $L^1([-\pi, \pi])$, c'est à dire que pour tout $f \in L^1([-\pi, \pi])$, $\|f(\cdot) - f(\cdot - h)\|_{L^1} \to 0$ si $h \to 0$.