Une ondelette C^∞ à support compact
(d'après Yves Meyer et Ingrid Daubechies)

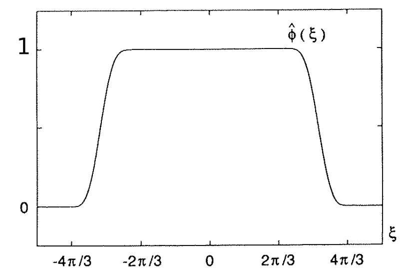
Soit $v(x) := x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$.

(a) On va admettre que $v(x) + v(1-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\cos^2(\tfrac{\pi}{2}v(x)) + \cos^2(\tfrac{\pi}{2}v(1-x)) = 1 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit ϕ définie par

$$\widehat{\phi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le |\xi| \le 2/3\pi \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}v(\frac{3}{2\pi}|\xi| - 1)\right] & \text{si} \quad 2/3\pi < |\xi| \le 4/3\pi \\ 0 & \text{si} \quad |\xi| > 4/3\pi \end{cases}$$



Déduire de (a) que $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Quelle propriété déduire pour le système $\big(\phi(\cdot - k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$?

Indication: Il existe toujours un et un seul l pour lequel $\widetilde{\xi} = \xi + 2\pi l \in [0, 2\pi[$.

(c) Soit $\widehat{h}(\xi) = \sqrt{2}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(2\xi + 4\pi l)$. Montrer que $\widehat{h}$ est 2π-périodique et que $\widehat{h} \in L^2([0, 2\pi])$.

(d) Montrer que

$$\widehat{h}(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2) = \sqrt{2}\,\widehat{\phi}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Indication: étudier le support de $\widehat{\phi}(\xi/2)$ et de $\widehat{\phi}(\xi + 4\pi l)$ pour $l \in \mathbb{Z}$)

(e) On pose $\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k)$ et $V_j = \overline{\mathrm{lin}}\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Puisque MR4 - MR6 sont satisfaites par construction il ne restent à montrer que MR1, MR2 et MR3. On admet MR2 et MR3.

Montrer que (d) implique MR1 en applicant $\mathcal{F}^{-1}$ sur les deux cotés de (1). On rappelle que selon (d), $\widehat{h}(\xi) = \sum_n h_n e^{-in\xi}$ pour une suite $(h_n) \in \ell_2$.

(f) On a donc bien trouvé une multirésolution avec fonction d'échelle à support compact (il en suit que l'ondelette ψ est également à support compact). Reste à trouver ψ. Montrer que

$$\widehat{\psi}(\xi) = \sqrt{2}\,e^{i\xi/2}\left[\widehat{\phi}(\xi+2\pi) - \widehat{\phi}(\xi-2\pi)\right]\widehat{\phi}(\xi/2).$$

(il convient d'utiliser une formule du cours qui met en relation $\widehat{\psi}$ avec $\widehat{\phi}$ et $\widehat{h}$).