Le théorème de Fejér et quelques conséquences ...

Exercice 1 On définit le noyeau de Dirichlet par

$$D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}$$

Montrer que $D_n(t) = \sin((n+\frac{1}{2})\, t)/\sin(\frac{1}{2}t)$ pour $t \neq 0$.

Exercice 2 On a

$$\left(\sum_{l=0}^{m} e^{i\left(l-\frac{m}{2}\right)t}\right)^2 = \left(\sum_{l=0}^{m} e^{i\left(l-\frac{m}{2}\right)t}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} e^{i\left(l-\frac{m}{2}\right)t}\right) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} e^{i\left(l-\frac{m}{2}\right)t} e^{i\left(k-\frac{m}{2}\right)t}$$

En déduire que $\left(\sum_{l=0}^{m} e^{i\left(l-\frac{m}{2}\right)t}\right)^2 = \sum_{r=-m}^{m} (m+1-|r|)e^{irt}$.
Indication : pour $r \in \mathbb{N}$, combien de $l, k \geq 0$ y a-t-il qui satisfont $l + k = r$?

Exercice 3 On introduit le noyeau de Fejér sur $[-\pi, \pi]$ par

$$K_n(t) := \tfrac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|)e^{ikt} \quad \text{pour} \quad (t \neq 0) \qquad \text{et} \quad K_n(0) := n+1.$$

Montrer que

$$K_n(t) = \tfrac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2.$$

Convergence en un point

Exercice 4 (un petit lemme bien utile)

(a) Déduire $K_n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

(b) Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a $K_n(t) \to 0$ uniformément sur $F_\delta := [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.
Indication : utiliser l'estimation $|\sin(\frac{t}{2})| \geq \sin(\frac{\delta}{2})$ sur F_δ.

(c) Montrer $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1$. Indication : rappeler d'abord $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, dt$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Se rendre compte que ces trois propriétés ensemble impliquent que pour n large, l'air sous la courbe de K_n est concentré dans un voisinage très étroit de l'origine.

Exercice 5* On suppose $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit

$$f_n = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\, dt$$

le n-ième coefficient de Fourier de f. Le but est de montrer que si f est continue dans un point $t_0 \in [-\pi, \pi]$, alors

$$\sigma_n(f, t_0) := \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) f(t_0 - s)\, ds \to f(t_0) \qquad (n \to \infty)$$

(ceci est le théorème de Fejér). Voici l'heuristique de la démonstration : soit $\delta > 0$ très petit et n très large. Alors

$$\sigma_n(f,t_0) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t_0-s)\,ds \overset{(1)}{\approx} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t_0-s)\,ds$$

(puisque presque toute la masse de K_n est concentré autour de l'origine, voir l'exercice précédent). La fonction f est continue en t_0 et donc a peu près constante sur $[t_0-\delta, t_0+\delta]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,t_0) &\overset{(1)}{\approx} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)f(t_0-s)\,ds\\ &\overset{(2)}{\approx} \tfrac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s)\,ds\right) f(t_0)\\ &\overset{(3)}{\approx} \tfrac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\,ds\right) f(t_0) = f(t_0)\end{aligned}$$

Trouver une démonstration rigoureuse du théorème de Fejér (indication : soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisir d'abord le δ en fonction de la continuité de f pour contrôler l'erreur dans (2), ensuite, avec δ fixé, choisir pour le n suffisamment grand pour contrôler l'erreur simultanément dans (1) et (3).

Convergence en norme L^1

Exercice 6 (Continuité de la translation dasns L^1)

(a) Soit $g = \sum_{j=0^n} a_j \mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j]}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$ avec $a = t_0 < t_1 < \dots t_n = b$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il y a un $\delta > 0$ tel que

$$\|g(\cdot) - g(\cdot - t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \varepsilon$$

pour tout $|t| < \delta$ (faire un dessin de $g(x) - g(x-t)$).

(b) Montrer que cette propriété s'étend à toute fonction $f \in L^1([a,b])$. Indication : Pour $f \in L^1([a,b])$ et $\varepsilon > 0$ il existe une une fonction en escalier g tel que $\|f-g\|_{L^1} < \varepsilon$. Décomposez donc

$$f(x) - f(x-t) = f(x) - g(x) \quad + \quad g(x) - g(x-t) \quad + \quad g(x-t) - f(x-t)$$

pour conclure.

Exercice 7* Soit $f \in L^1([-\pi,\pi])$. On pose (comme avant)

$$\sigma_n(f,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)f(t-s)\,ds$$

Montrer que $\|\sigma_n(f,\cdot) - f\|_{L^1} \to 0$.

Indications : on observera que

$$f(x)-\sigma_n(f,x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,dy f(x) - \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)K_n(y)\,dy = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)(f(x-y)-f(x))\,dy$$

Pour démontrer le résultat, intégrer $|f(x) - \sigma_n(f,x)|$ sur $[-\pi,\pi]$, utiliser l'identité ci-dessus, puis distinguer dans l'intégrale dans la variable y les cas $|y| < \delta$ et $|y| \ge \delta$. Dans le premier cas (y petit, utiliser la continuité de la translation sur L^1, dans le deuxième cas estimer contre

$$2\|f\|_{L^1}\int_{|y|\ge\delta} K_n(y)\,dy$$

qui tend vers 0 avec $n \to \infty$ par convergence uniforme des noyeaux.