Exercice 1
Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants:

$$y'(x) = x\,y(x) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\,y(x) \qquad y'(x) = x^2\,y(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}\,y(x) \qquad y'(x) = e^x y(x) \qquad y'(x) = \frac{x\,y(x)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y'(x) = \log(x)\,y(x) \qquad y'(x) = \sin(x)\cos(x)\,y(x)$$

Exercice 2
Déterminer les solutions aux problèmes homogènes suivants:

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x) \qquad y'(x) + cos(x)y(x) = 0 \qquad xy' + 3y = 0$$

Exercice 3
Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes associés aux problèmes ci-dessus.

$$y'(x) = \frac{2}{x+1}y(x)+(x+1)^2\cos(x) \qquad y'(x)+cos(x)y(x) = \sin(x)\cos(x) \qquad xy'+3y = x^2$$

Exercice 4
Déterminer les solutions aux problèmes inhomogènes suivantes

$$(1+x^2)\,y'(x) - 2x\,y(x) = (1+x^2)^2 \qquad y'(x) + 2x\,y(x) = 2xe^{-x^2} \qquad y'(x) = x^2(1-y(x))$$

Exercice 5 (Problèmes avec valeur initiale)
Déterminer les solutions (uniques!) des problèmes de l'exercice 1 à satisfaire

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = \pi \qquad y(1) = e$$

$$y(2) = 1 \qquad y(0) = e \qquad y(2) = 0$$

$$y(1) = 1 \qquad y(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

Exercice 6 (Méthode de Bernoulli)
Les problèmes suivants sont de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n$. On les reduira à des problème linéaires de première ordre en substituant $z(x) = y(x)^{1-n}$. Donnez ensuite la solution unique et précisez l'intervalle maximal d'éxistence.

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + y(x)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = y(x) - 2xy(x)^3 \\ 2y(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = xy(x)^2 + \frac{xy(x)}{1+x^2} \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

Exercice 7*
Trouver une solution au problème $y''(x) = 2y(x)y'(x)$ avec les condition initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ en posant $y'(x) = p(y(x))$ pour une fonction $p \in C^1(\mathbb{R})$ à déterminer.