Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes:
$y' + 5y = 3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$
$y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$
$y' + y = xe^{-x} + 1$
$3y' + 2y = x^3 + 6x + 1$
$y' - y = \sin(x) + 2\cos(x)$
$y' = 3y + e^{3x}\sin(x)$
$y' = y + \sin(x) + \sin(2x)$

Exercice 2 (Croissance de population)
On considère une population formé de N individus et évoluant en fonction du temps $t > 0$.

1. Dans le modèle de Malthus on suppose que le taux d'accroissement de la population est proportionnel au nombre d'individus.
(a) Justifier que dans ce modèle N vérifie l'équation $\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = kN(t)$ puis si on suppose N dérivable que $N'(t) = kN(t)$ avec k constante (égale à la différence entre le taux de natalité et de mortalité qui sont supposés constants dans ce modèle).
(b)Déterminer N si à l'instant $t = 0$ la population est de N_0 individus. (c) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini?

2. Le modèle de Verhulst prend en compte que les ressources de l'environnement ne sont pas illimitées et suppose que le taux k n'est plus constant mais proportionnel à la différence entre une population maximale N^* et la population à l'instant t. On a alors $k(t) = r(N^* - N(t))$ et N est solution de l'équation $N'(t) = rN(t)(N^* - N(t))$ (appelée équation logistique).
(a) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = 1/N(t)$. Calculer N' en fonction de y et y'. Justifier que y est dérivable puis calculer N' en fonction de y et y'.
(b) Remplacer N' et N par leurs expressions en fonctions de y' et y dans l'équation logistique et vérifier que y est solution de l'équation différentielle
$$y' = r(1 - Ny).$$
(c) Résoudre l'équation précédente.
(d) En déduire que $N(t) = \frac{N^*}{1+Ke^{-rN^*t}}$ avec une constante réelle K.
(e) Comment évolue cette population lorsque t tend vers l'infini?

Exercice 3 (Epidemies sans immunisation)
Il existent des épidemies qui guérissent quasiment sans aucun effet d'immunisation (la tuberculose, par exemple). On considère deux groupes de personnes: des susceptibles $S(t)$ et des infectants $I(t)$. Si on suppose aucune phase latente (une phase latente est une période d'infection pendant laquelle on ne peut pas transmettre l'infection), alors $S(t) + I(t)$ est constant, d'où $S'(t) + I'(t) = 0$. Le changement des deux groupes est modélisé par une fonction f d'infection, on a donc $S' = -f(S, I)$ et par conséquent $I' = f(S, I)$. Il paraît logique d'avoir une proportionalité entre $f(S, I)$ et S et I d'où

$f(S,I) = rSI$ avec une rate $r > 0$. La guérison se passe a une rate $a > 0$. On déduit comme modèle

$$\begin{cases} S'(t) &= -rS(t)\,I(t) + aI(t) \\ I'(t) &= rS(t)\,I(t) - aI(t) \end{cases}$$

avec des valeur initiales $S(0) = S_0$ et $I(0) = I_0$.

1. On pose $N = S_0 + I_0$. Montrer que les fonctions u et v, définis par $u(t) = S(t/a)/N$ et $v(t) = I(t/a)/N$ satisfont

$$\begin{cases} u + v &\equiv 1 \\ u' &= -(Ru - 1)v \\ v' &= (Ru - 1)v \end{cases}$$

   avec des valeur initiales $u(0) = u_0 = S_0/N$ et $v(0) = v_0 = I_0/N$. Ici, $R = rN/a$ est en fait le nombre d'infections qu'un individu transmet pendant la phase d'infection en moyenne. Indication: dérivez les équations qui définissent u et v par rapport à t et utilisez les équations différentiels que satisfont S et I.

2. Montrer que v satisfait l'équation logistique $v' = ((R-1) - Rv)v, \qquad v(0) = v_0$.

3. Utiliser les techniques de l'exercice précédente pour trouver une solution à cette équation. Indication: on pose $v^* = 1 - \frac{1}{R}$. Démonterer que

$$v(t) = \frac{v_0 v^*}{v_0 + (v^* - v_0)\exp((1-R)t)}$$

4. Discuter le comportement de la solution quand t tend vers infini en fonction de R.

Exercice 4 (Décroissance radioactive)
Pour les substances radioactives, des expériences ont montré que, en l'absence d'apport extérieur, le taux de variation du nombre $Q(t)$ d'atomes radioactifs est proportionnel au nombre d'atomes radioactifs présents. La fonction Q est donc solution de l'équation différentielle $y' = -\mu y$ où μ est une constante propre à la substance radioactive.
(a) On appelle temps de demi-vie pour une substance radioactive le temps T nécessaire pour que la moitié de ses noyaux radioactifs disparaissent, trouver une relation reliant T et μ.
(b) Pour le carbone-14, T est environ de 5730 ans, que vaut approximativement μ ?
(c) L'analyse des restes d'un arbre mort lors d'une éruption volcanique fait apparaître que l'arbre ne contient plus que 40% du carbone-14 qu'il contenait avant l'éruption. De quand date l'éruption si l'analyse a été effectuée en 2006 (penser à utiliser le temps de demi-vie du carbone-14).
(d) Même question avec une analyse plus fine qui donne 42%

Exercice 5 Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer l'ensemble des solutions, puis, la solution qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

$y'' + 2y' - 3y = -t + 1$
$y'' + 2y' - 3y = e^t$
$y'' + 2y' - 3y = -t + 1 + e^t + \cos(t)$
$y'' - 6y' + 9y = 3 + e^{3t}$
$y'' - 3y' = 3 + t^2$
$y'' + y = t + \sin(t)$

Remarque: Vous trouverez quelques corrigés vite-faits de la première fiche sur ma page personelle `http://www.math.u-bordeaux1.fr/~haak/`