Notion d'univers, langage probabiliste et ensembliste

Exercice 1 Soit $\Omega = \{0, 1\}$. Décrire $\Omega \times \Omega$.
Soient $A = \{l, t\}$, $B = \{a, o\}$ et $C = \{b, g, u\}$. Décrire $A \times B \times C$.

Exercice 2 Donner l'univers Ω pour modéliser
1- un lancement simultane de trois pièces distingués (face/pile) évenements
2- un repas de 15 sushis qui sont soit verts (des "Maki") soit blancs (couleur du riz) à l'extérieur. On s'intéresse aux ordres possibles de blanc-vert.
3- le nombre de jours de pluie a Bordeaux dans 2007.
4- une loterie ou 6 parmi 49 boules numérotés sont tirés sans les remettre

Exercice 3 Soient A, B et C trois événements d'un univers Ω.
1- Montrer que $A \cap B = B$ et $A \cup B = A$ entraînent chacun $B \subset A$.
2- Si $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ montrer que la réalisation de A entraîne celle de B et de C

Calcul basique avec probabilités, indépendance

Exercice 4 Soit Ω un univers donné. Soient A et B deux événements de cet univers.
Peut-on avoir simultanément:
$P(A) = 0,9$ $P(B) = 0,3$ $A \cap B = \emptyset$
$P(A) = 0,9$ $P(B) = -0,5$
$P(A) = 0,8$ $P(B) = 0,4$ $P(A \cap B) = 0,2$
$P(A) = 0,9$ $P(B) = 0,3$ $P(A \cap B) = 0,1$
$P(A) = 0,9$ $P(B) = 0,3$ $P(A \cap B) = 0,3$

Exercice 5 Soient deux événements A et B de Ω tels que:
$$P(A) = 5/8, \qquad P(A \cup B) = 7/8, \qquad P(A \cap B) = 1/4.$$
1- Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.
2- A et B, sont-ils indépendants?

Exercice 6 On considère une course de quatre chevaux A, B, C et D et on sait que
A et D ont la même chance de gagner,
B a deux fois moins de chances de gagner que A et
B a deux fois plus de chances de gagner que C
Calculer la probabilité qu'a chaque cheval de gagner? Les quatre chevaux courent trois courses (indépendantes). Quelle est la probabilité pour que l'écurie E à laquelle appartiennent les chevaux A et D
- ne gagne jamais
- gagne au moins une fois?

Exercice 7 Une chorale a 100 membres. Un sondage donne le tableau suivant:

	hommes	femmes
font du sport	12	48
font pas de sport	24	16

Donner le pourcentage de hommes, de femmes, de sportifs, de non-sportifs, de sportifs parmi les hommes et celui parmi femmes.

Exercice 8 Devant un certain tableau clinique, on estime qu'une personne a six chances sur dix d'être atteinte d'une certaine maladie. On effectue deux tests:
T1 est positif à 70% sur les malades et à 20% sur les non-malades
T2 est positif à 90% sur les malades et à 30% sur les non-malades
On suppose que les deux tests sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que le deuxième test soit positif sachant que le premier l'a été.

Combinatoire, exercices mixtes

Exercice 9 Un groupe de dix enfants comprend cinq garçons et cinq filles
1- De combien de façons peut-on les classer?
2- Parmi ces classements, combien y en a-t-il qui alternent régulièrement un garçon et une fille?

Exercice 10 On divise un groupe de 24 étudiants en deux sous groupes de 12. Combien y a-t-il de façons d'effectuer cette partition?

Exercice 11 Un professeur distribue 10 copies à 10 élèves, dont Jean et Jacques.
1- Probabilité que chaque élève reçoive sa copie?
2- Probabilité que Jean reçoive sa copie?
3- Probabilité que Jean et Jacques reçoivent chacun leur copie?

Exercice 12 On dispose de cinq outils différents que l'on peut ranger dans sept casiers de façon tout à fait quelconque. Déterminer le nombre de façons de ranger les outils sans qu'ils soient tous dans le même casier.

Exercice 13 Dans un laboratoire le matériel provient de deux usines: L'usine A qui a fourni 60% de l'équipement, l'usine B qui a fourni le reste. Le matériel provenant que de A a 10% de défauts, celui provenant de B, 20%:
1 - Quel est le pourcentage de matériel présentant un défaut?
2 - Parmi les appareils sans défauts, quel est le pourcentage de ceux venant de A?

Exercice 14* Soit $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$. On démontrera $|P(\Omega_n)| = 2^n$. Indication: On peut raisonner par recurrence et remarquer que si $A \subset \Omega_{n+1}$, on a soit $(n+1) \in A$ soit $(n+1) \notin A$...