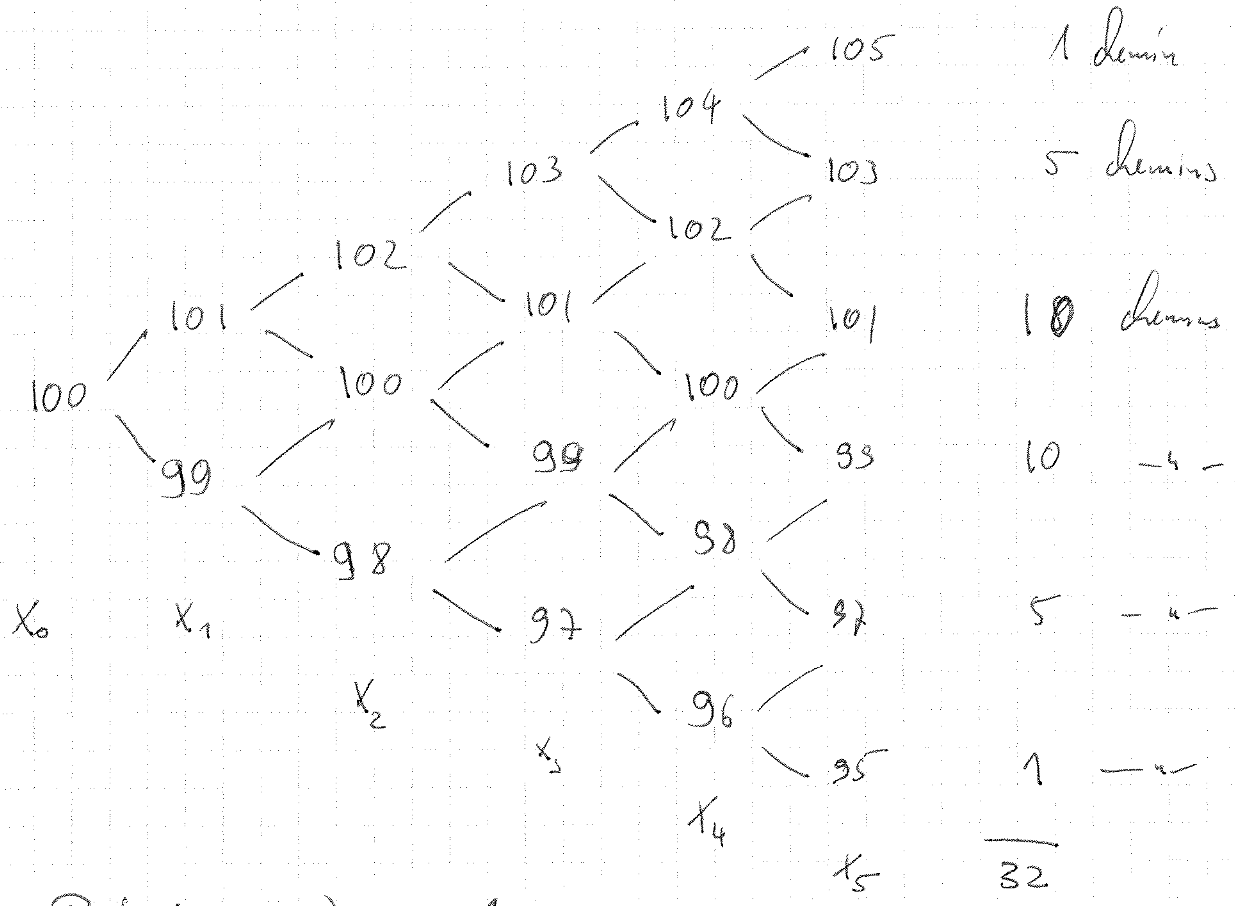
Feuille 4

Ex2

a)



b) $P(X_5 = 105) = \frac{1}{32}$

$P(X_5 = 103) = \frac{5}{32}$.

Pourquoi 5 chemins ? parmi les 5 décisions il y a ex. une qui descend $\rightsquigarrow \binom{5}{1} = 5$ poss.

$P(X_5 = 101) = \frac{10}{32}$

Il faut descendre ex. 2 fois parmi 5

$\rightsquigarrow \binom{5}{2} = 10$ chemins.

par symétrie(!)

$P(X_5 = 99) = \frac{10}{32}$

$P(X_5 = 97) = \frac{5}{32}$

$P(X_5 = 95) = \frac{1}{32}$

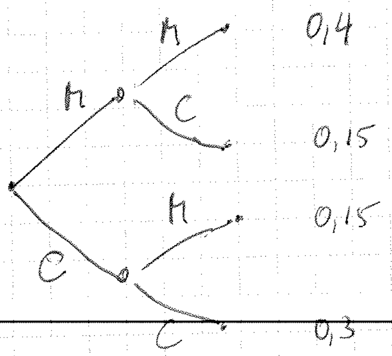
Ex3: a) P("monter") = 0,55

P("monter 2 fois") = 0,4

P("monter, chuter" = 0,15

P("chuter, monter") = 0,15

P("chuter 2 fois") = 1 − 0,4 − 0,15 − 0,15 = 0,3.



b) A = monter le 1e jour

B = monter le 2ième jour

$P(A \cap B)$ = P("monter 2 fois") = 0,4

$\neq P(A) \cdot P(B) = 0,55 \times 0,55.$

donc A, B ne sont pas indép.

c) P("Monter demain" | "Monté auj.") $=$ $\dfrac{P(\text{"monter auj."} \cap \text{"mont. dem."})}{P(\text{"mont. auj."})}$

$= \dfrac{0,4}{0,55} = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{20}{11} = \dfrac{8}{11}.$

$P($"chuter demain" $|$ "monté auj.")

def. proba cond. $=$ $\dfrac{P(\text{"monter, puis chuter"})}{P(\text{"chuter"})} = \dfrac{0{,}15}{0{,}45} = \dfrac{1}{3}$.

Ex 7 répétitions indépendantes jusqu'à l'événement "6"

$\leadsto$ loi géométrique, paramètre $p = \frac{1}{6}$.

Cours: $E(X) = \frac{1}{p} = 6$.

$V(X) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{5/6}{1/36} = \underline{30}$.

En moyenne il faut donc jouer 6 fois pour avoir un "6". Etonnant, non ?

Ex 8: Mot clé "nombre de ... en une période de temps"

a) $\leadsto$ loi de Poisson

~~$N \leadsto P(\lambda)$. Cours: $E(N) = V(N) = \lambda$.~~

moyenne 1,4 $\leadsto$ $E(N) = 1{,}4 \Rightarrow \lambda = 1{,}4$.

On a donc $N \leadsto P(1{,}4)$.

b) $P(N = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour $\forall k$.

$P(N=0) = e^{-\lambda} \approx 0{,}247$

$\rightarrow P(N=1) = \dfrac{1{,}4}{1} \cdot e^{-1{,}4} \approx 0{,}345$

$P(N \geq 1)$ "au moins un"

$= 1 - P(N=0) = 1 - 0{,}247 \approx 0{,}753$.

$$P(N=1 \mid N \geq 1) = \frac{P(\{N=1\} \cap \{N \geq 1\})}{P(N \geq 1)}$$

$$= \frac{P(N=1)}{P(N \geq 1)}$$

$$\approx \frac{0{,}345}{0{,}753} \approx \underline{0{,}458}.$$

<u>Ex 3</u> : N = nombre de clients entre 14:30 et 14:31.

$N \sim \mathcal{P}(0{,}8)$.

a) $P(N=0) = \frac{(0{,}8)^0}{0!} e^{-0{,}8} = \frac{1}{1} \cdot e^{-0{,}8} \approx 0{,}449$

b) $P(N \in \{1,2\}) = P(N=1) + P(N=2)$

$$= \frac{0{,}8}{1} \cdot e^{-0{,}8} + \frac{(0{,}8)^2}{2} e^{-0{,}8}$$

$$\approx 0{,}503$$

c) $P(N \leq 3) = \underbrace{P(N=0) + P(N=1) + P(N=2)}_{0{,}449 + 0{,}503} + P(N=3)$

$P(N=3) = \frac{(0{,}8)^3}{6} \cdot e^{-0{,}8} \approx 0{,}038$

$\Rightarrow P(N \leq 3) \approx 0{,}99$

donc avec moins de 1% de proba on a moins de 3 clients.

On peut enchaîner une question qui n'est pas très délicate :
Le supermarché veut promettre X euros si un client attend plus de 3 autres clients devant lui à la caisse.
Quel est la valeur maximale pour tirer du profit de cette "offre" à la clientèle, si on ne met pas assez de personnel aux caisses sachant que l'on paye le caissier au SMIC ?

Je crains que naïf est celui qui ne croit pas que tels calculs sont faits en réalité...

Ex 10 :

S possède n composantes, proba de panne : p

N = nombre de comp. en panne.

$N \neq 0 \iff S$ en panne.

On veut donc savoir $P(N=1 \mid N \neq 0)$.

$N \sim B(n, p)$.

$$P(N=1) = \binom{n}{1} p^{n-1}(1-p)$$

$$P(N \neq 0) = 1 - P(N=0) = 1 - p^n.$$

$$\Rightarrow P(N=1 \mid N \neq 0) \overset{\text{def.}}{=} \frac{P(\{N=1\} \cap \{N \neq 0\})}{P(N \neq 0)}$$

$$= \frac{P(N=1)}{P(N\neq 0)} = \frac{n\cdot p^{n-1}(1-p)}{1-p^n}$$

ici l'ex. est à priori fin. Pour le plaisir:

$$= \frac{n\, p^{n-1}\,\cancel{(1-p)}}{\cancel{(1-p)}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p^j}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p^{n-1}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} p^j}.$$

Ex 11: $X \rightsquigarrow$ loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$.

$$E(X) = \sum_{j=1}^{6} j\cdot P(X=j)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\sum_{j=1}^{6} j = \frac{1}{6}\cdot\frac{\cancel{6}(\cancel{6}+1)}{2} = \frac{7}{2} = \underline{3{,}5}.$$

Rem: $1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n$

$n+1$

$n+1$

$n+1$

$\Big\}\ \frac{n}{2}$ couples.

$$\rightsquigarrow\ 1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}\cdot(n+1)$$

$$V(X) = \sum_{j=1}^{6} j^2\cdot P(X=j) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \qquad (\text{Formule } E(X^2)-(E(X))^2)$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j^2 - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} \approx 2{,}917.$$

b) n répétitions indép.

$$\Rightarrow E\left(\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_1+\dots+X_n)$$

$$= \frac{1}{n}\Big(E(X_1)+\underbrace{E(X_2)}_{=E(X_1)}+\dots+\underbrace{E(X_n)}_{=E(X_1)}\Big)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot E(X_1) = E(X_1) = 3{,}5.$$

$$V\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_1+\dots+X_n)$$

$$\overset{\text{indépend.}}{=} \frac{1}{n^2}\Big(V(X_1)+\underbrace{V(X_2)}_{=V(X_1)}+\dots+\underbrace{V(X_n)}_{=V(X_1)}\Big)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot V(X_1)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot V(X_1) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ !$$

C'est à dire la "dispersion" autour de la moyenne tend vers 0 si l'on prend des moyennes de beaucoup de rép. indépend.

Ceci est un cas part. de la loi faible des grds nombre qui nous dit que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

pour tout $\varepsilon > 0$.