Indépendance et Probabilités conditionnelles

Exercice 1 Soit $\Omega = \{1, \dots, 100\}$ et A,B et C les évènements $A = \{1, \dots, 50\}$, $B = \{31, \dots, 70\}$ et $C = \{30, 35, 40, 45, 50\} \cup \{96, \dots, 100\}$.
1- Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$,$P(B \cap C)$ et $P(A \cap B \cap C)$.
2- A, B, C,sont-ils indépendants?

Exercice 2 On modélise (de façon très simplifié) le comportement d'une action de bourse avec un arbre qui décrit une suite indépendante de changements où dans chaque étape le cours peut soit monter par 1, soit chuter par 1. On suppose que ces deux évènements se passent avec la même probabilité, soit 1/2. Le cours d'une action est au début de 100 euros.
1- Donner l'arbre avec tous les développements possibles après 5 étapes.
2- Calculer la probabilité d'avoir 105, 103, 101, 99, 97 ou 95 euros après les 5 étapes indépendantes.

Exercice 3 Le cours des actions de l'entreprise ABC monte à 55% de tous les jours de bourse.
On a observé les règles suivantes: dans 40% des jours, le cours est monté dans deux jours successifs, dans in 15% des cas le cours montait un jour premier pour chuter le deuxième jour et dans 15% des cas le cours chutait d'abord pour remonter le deuxième jour. Dans le reste des cas, le cours chutait pendant deux jours.
Soit $A =$"le cours monte le premier jour"
et $B =$"le cours monte le deuxième jour".
1- Donner un arbre des possibilités pendant deux jours consécutifs.
2- Est-ce que A et B sont des évènements indépendants?
3- Aujourd'hui le cours est monté. Avec quelle probabilité va-t-il monter demain? Avec quelle probabilité va-t-il chuter demain?

Variables aléatoires

Exercice 4 Soient X, Y des variables aléatoires tel que: $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$ est distribué selon le tableau suivant:

i \ j	-1	0	1
-1	3/32	5/32	3/32
0	5/32	8/32	3/32
1	1/32	3/32	1/32

1- Calculer $P(X = -1)$ et $P(Y = -1)$.
2- Est-ce que X et Y sont indépendants?

3- Qu'est-ce qui en est avec X^2 et Y^2?

Exercice 5 Le prix d'un ticket de tramway est de 1 euro et celui d'une amende est de 40 euros. La probabilité qu'un voyageur soit contrôlé lors d'un trajet est p. On désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de contrôles d'un voyageur lors de N trajets.
1- Déterminer la loi de X.
2- Un voyageur indélicat est tenté de ne jamais composter son ticket. Quelle doit être la probabilité p de contrôle pour l'en dissuader ? (on pourra introduire la variable aléatoire Y de gain lorsque l'on ne composte jamais lors des N trajets)

Exercice 6 On considère le jeu "chuck-a-luck": un joueur met 1 euro et choisit un nombre entre 1 et 6. Ensuite il lance 3 dés homogènes. Si au moins un dé montre son nombre choisi, il est rendu son euro et en plus il obtient 1 euro pour chaque dé qui montre son numéro, sinon il a perdu. Soit X la variable aléatoire du gain. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 7 On jette un dé jusqu'à ce qu'on obtienne 6. On note X la variable aléatoire nombre d'épreuves à effectuer. Quelle est la loi de probabilité suivie par X? Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8 Dans un atelier, le nombre N d'accidents du travail en une période d'une semaine, suit une loi de Poisson de moyenne $1,4$.
1- Déterminer la distribution de probabilité de N
2- Calculer les probabilités des événements
- il y a au eu au moins un accident au cours d'une semaine,
- il y a eu exactement un accident au cours d'une semaine sachant qu'il y en a eu au moins un.

Exercice 9 On a constaté que le nombre moyen de clients, par minute, qui arrivent aux caisses d'un supermarché est $0,8$. Sachant que le nombre de clients par minute suit une loi de Poisson et que $e^{-0,8} \sim 0,449$, déterminer la e probabilité pour
1- Qu'il n'y ait aucun client entre 14h30 et 14h31
2- Qu'il y ait un client ou deux entre 14h30 et 14h31
3- Qu'il y ait au plus 3 clients entre 14h30 et 14h31

Exercice 10 On considère un système S formé de n composants identiques dont chacun possède (de façon indépendante des autres) la probabilité p de tomber en panne. Quelle est la probabilité conditionnelle que exactement un des n composants soit en panne sachant que le système S est en panne? (ind. : on pourra introduire la variable aléatoire "le nombre de composants en panne".)

Exercice 11 On lance un dé et on note X le résultat obtenu.
1- Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2- On lance n fois le dé et l'on note X_i le résultat obtenu lors du $i$ème lancé. Calculer $E(\frac{X_1+...+X_n}{n})$ et $V(\frac{X_1+...+X_n}{n})$ Que remarquez vous ?