feuille 5

ex 1 : voir TD

ex 2 : — " —

ex 3 : On remarque que $e^{-|x|} \geq 0$ pour tout x.

il faut vérifier

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

pour satisfaire (1) il faut que $c \geq 0$

(puisque $\cos(\dots) \in [-1,1]$!).

Calculons

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{symétrie}}{=} 2\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= 2c\int_0^{\infty} (1+\cos(\pi x))e^{-x}\,dx.$$

On a $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$

et

$$\int_0^{\infty} \underbrace{\cos(\pi x)}_{u}\,\underbrace{e^{-x}}_{v'} = \left[\cos(\pi x)(-e^{-x})\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\sin(\pi x)\cdot\pi(-e^{-x})$$

$$= 1 - \pi\int_0^{\infty} \underbrace{\sin(\pi x)}_{u}\,\underbrace{e^{-x}}_{v'}\,dx$$

$$= 1 - \pi\left(\left[\sin(\pi x)(-e^{-x})\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \pi\cos(\pi x)(-e^{-x})\right)$$

$$= 1 - \pi^2\int_0^{\infty} \cos(\pi x)e^{-x}\,dx$$

donc $(1+\pi^2)\int_0^{\infty} \cos(\pi x)e^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \cos(\pi x)e^{-x}\,dx = \frac{1}{1+\pi^2}$.

ainsi, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2c \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$

$= 2c\left(1 + \frac{1}{1+\pi^2}\right) = 1$ (pour satisfaire (2))

d'où $c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\pi^2}{2+\pi^2}$.

~~$P(-5 < X < 5) = \int_{-5}^{3} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx$~~

Ex 4 : fait en TD.

Ex 5 : a) $P(|X| > x) = P(\{X > x\} \cup \{X < -x\})$

$= P(X > x) + P(X < -x)$

(les deux événements sont disjoints !)

b) $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m, σ inconnus.

$P(X \geq 1{,}6) = 0{,}1$ (10%) $\Leftrightarrow P(X < 1{,}6) = 0{,}9$.

$P(X < 1{,}4) = 0{,}25$ (25%).

On sait que

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{1{,}6-m}{\sigma}\right) = 0{,}9$$

et $P\left(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{1{,}4-m}{\sigma}\right) = 0{,}25$.

appelons $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Donc $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

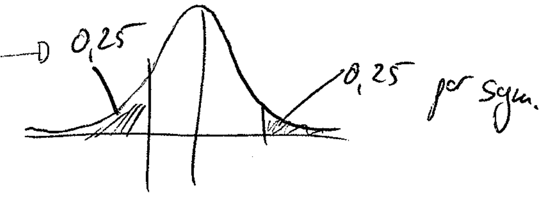
Lisons le tableau :

(1) $$P\left(Y < \frac{1{,}6-m}{\sigma}\right) \approx 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1{,}6-m}{\sigma} \approx 1{,}29$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}6 - m \approx 1{,}29 \cdot \sigma. \qquad (\mathrm{I})$$

(2) $$P\left(Y < \frac{1{,}4-m}{\sigma}\right) = 0{,}25$$



$$\Leftrightarrow \quad 1 - P\left(Y < \frac{m-1{,}4}{\sigma}\right) = 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(Y < \frac{m-1{,}4}{\sigma}\right) = 0{,}75$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m-1{,}4}{\sigma} \approx 0{,}68$$

$$\Leftrightarrow \quad m - 1{,}4 \approx 0{,}68 \cdot \sigma \qquad (\mathrm{II})$$

On prend $(\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$:

$$\begin{array}{rrcl} & 1{,}6 - m & = & 1{,}29\,\sigma \\ + & m - 1{,}4 & = & 0{,}68\,\sigma \\ \hline & 3 & = & 1{,}97\,\sigma \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{3}{1{,}97} \approx 1{,}52.$$

d'où $$m = 1{,}4 + 0{,}68\,\sigma = 2{,}44.$$

donc $$X \sim \mathcal{N}(2{,}44\ ;\ 1{,}52)$$

Ex 6 : $X \sim \mathcal{N}(2, \sigma^2)$.

$$P(|X-2| > 0{,}3) = 0{,}1$$

$$\cancel{\Leftrightarrow P(1{,}7 \le X}$$

$$\Leftrightarrow \quad P(|X-2| \le 0{,}3) = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \quad P(1{,}7 \le X \le 2{,}3) = 0{,}9$$

On pose $Y = \dfrac{X-2}{\sigma}$. $\quad Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\underbrace{P\left(\frac{-0{,}3}{\sigma} \le Y \le \frac{0{,}3}{\sigma}\right)} = 0{,}9$$

$$= F(0{,}3/\sigma) - F(-0{,}3/\sigma)$$

$$= F(0{,}3/\sigma) + (1 - F(0{,}3/\sigma))$$

$$= 2 \cdot F(0{,}3/\sigma) - 1 = \quad 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \quad F(0{,}3/\sigma) = \frac{0{,}9+1}{2} = 0{,}95.$$

tableau

$$\Rightarrow \quad 0{,}3/\sigma = 1{,}65 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{0{,}3}{1{,}65} \approx 0{,}18.$$

Puisque $X \sim \mathcal{N}(2, (0{,}18)^2)$

on a

$$P(|X-2| > 0{,}6) = 1 - P(|X-2| \le 0{,}6)$$

$$= 1 - P(1{,}4 \le X \le 2{,}6)$$

$$= 1 - P\left(\frac{1{,}4-2}{0{,}18} \le Y \le \frac{2{,}6-2}{0{,}18}\right)$$

$\approx 1{,}21$

$$= 1 - \left[F(1{,}21) - F(-1{,}21) \right]$$

$$= 1 - \left[2 \cdot F(1{,}21) - 1 \right]$$

$$= 2 - 2 \cdot F(1{,}21) = 2\left(1 - F(1{,}21)\right)$$

tabl.

$$= 2(1 - 0{,}8869) = 2 \cdot 0{,}1131$$

$$= 0{,}2262 .$$

Ex 7: $\cancel{X} \sim N(6{,}25 ; (0{,}36)^2)$.

on cherche $t > 0$ t.q.

$$P(6{,}25 - t < X < 6{,}25 + t) \geq 0{,}75 .$$

renorm.

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-t}{0{,}36} \leq \underbrace{\frac{X - 6{,}25}{0{,}36}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{t}{0{,}36} \right) \geq 0{,}75$$

$$\Leftrightarrow F\left(\frac{t}{0{,}36}\right) - F\left(\frac{-t}{0{,}36}\right) \geq 0{,}75$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot F(t/0{,}36) - 1 \geq 0{,}75$$

$$\Leftrightarrow F(t/0{,}36) \geq \frac{1 + 0{,}75}{2} = 0{,}8750$$

tableau

$$\Leftrightarrow \frac{t}{0{,}36} = 1{,}16 \Leftrightarrow t = 1{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}4176 .$$

$$\approx 0{,}42$$

Il s'agit donc de l'intervalle

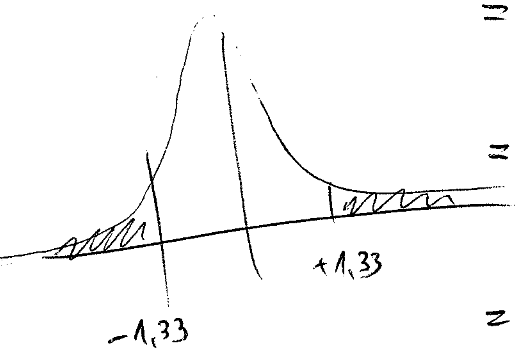
$$[\, 5{,}83 \; ; \; 6{,}67 \,] .$$

Ex 8. E = erreur !

$E \sim \mathcal{N}(0, (0{,}015)^2)$.

Le pièce est écarté si l'erreur est plus large que 0,2 (en val. absolue)

$\rightsquigarrow$ On étudie $P(\{-0{,}02 > E\} \cup \{E > 0{,}02\})$



$= P(E < -0{,}02) + P(E > 0{,}02)$

$= P\left(\frac{E-0}{0{,}015} < \frac{-0{,}02-0}{0{,}015}\right) + P\left(\frac{E-0}{0{,}015} > \frac{0{,}02-0}{0{,}015}\right)$

$= P(F < -1{,}33) + P(F > 1{,}33)$

$F = \frac{E-0}{0{,}015}$.

$= (1 - P(F < 1{,}33)) + (1 - P(F \leq 1{,}33))$

$= 2(1 - P(F < 1{,}33)) = 2 \cdot (1 - 0{,}9082)$

$= 0{,}1836$.

Ex 9: a) $X \sim \mathcal{N}(200, (0{,}38)^2)$.

$P(\text{erreur } L) = P(\{X < 199\} \cup \{X > 201\})$

$= P(X < 199) + P(X > 201)$

$= P\left(\frac{X-200}{0{,}38} < \frac{199-200}{0{,}38}\right) + P\left(\frac{X-200}{0{,}38} > \frac{201-200}{0{,}38}\right)$

$Y = \frac{X-200}{2}$

$Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$= P(Y < -2{,}63) + P(Y > 2{,}63)$

$= (1 - P(Y < 2{,}63)) + (1 - P(Y \leq 2{,}63))$

$= 2(1 - P(Y \leq 2{,}63)) = 2 \cdot (1 - 0{,}9957) = \underline{0{,}0086}$

Z compte le nombre de morceaux avec erreur L.

$Z \sim B(n, p)$ avec $n = 2000$, $p = 0{,}083$

Soit $W \sim N(np, npq)$.

Alors $P(Z \geq 30) \approx P(W \geq 30)$.

$n \cdot p = 17{,}2$

$n \cdot p \cdot q = \sigma^2 = 17{,}0521$

$\sim \sigma \approx 4{,}13$

$$P(W \geq 30) = 1 - P(W < 30)$$

$$= 1 - P\left(\frac{W - 17{,}2}{4{,}13} < \frac{30 - 17{,}2}{4{,}13}\right)$$

$\frac{W-17{,}2}{4{,}13} \sim N(0,1)$

$$= 1 - P\left(\frac{W - 17{,}2}{4{,}13} < \underbrace{3{,}099}_{\sim 3{,}1}\right)$$

$$\overset{\text{tableau}}{=} 1 - 0{,}999032$$

$$= 0{,}000968 \quad \text{donc} < 1‰ \;!$$

hors exercice:

Par contre $P(W \geq 20) = 1 - P(W < 20)$

$$= 1 - P\left(\frac{W - 17{,}2}{4{,}13} < 0{,}68\right)$$

$$= 0{,}2483$$

donc avec proba $\approx 25\%$ il faut écarter 20 morceaux sur 2000 !

Ex 10: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. (a) $E(M) = \frac{1}{n} E(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_1) + \dots + E(X_n)\right) = E(X_1) = \mu$.

$V(M) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) \overset{\text{indép}}{=} \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + \dots + V(X_n)\right) = \frac{1}{n} \cdot \sigma^2$

(b) $\Rightarrow M \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. (c) 17 parcelles. (j'espère!)