Variables aléatoires à densités

Exercice 1 Dans un aérodrome, la durée du processus d'atterrissage d'un avion, mesuré en minutes, est une variable aléatoire T dont la densité de probabilité est

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les probabilités des événements: $\{T > 2\}$, $\{1 < T < 3\}$ et la probabilité que $\{1 < T < 3\}$ *sachant* que $\{T < 4\}$.

Exercice 2 Exprimée en heures, la duré de vie D d'un certain modèle d'ampoule électrique est une variable aléatoire de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} c\,x^{-2} & \text{si} \quad x > 200 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer c.
2. On contrôle l'état d'une ampoule après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité est-elle hors d'usage?
3. On équipe un local souterrain de 5 de ces ampoules électriques, neuves. On suppose que les durées de vie $D_1, \ldots, D_5$ de ces ampoules sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f dessus. On contrôle l'état des ampoules après 300 heures d'utilisation. Avec quelle probabilité deux (exactement) des ampoules sont hors d'usage?

Exercice 3 Soit $f(x) = c(1 + \cos(\pi x))e^{-|x|}$. Déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que f est densité d'une variable aléatoire X. *Indication:* pour faciliter les calculs, on peut remarquer que f est une fonction symétrique: $f(x) = f(-x)$.

La loi normale

Exercice 4

1. Si Y suit la loi normale $N(4,\ 4)$ déterminer $P(Y < 6)$.
2. Si Y suit la loi normale $N(3,\ 2,25)$ déterminer x pour que $P(Y \leq x) = 0,4207$.
3. Si Y suit la loi normale $N(5,\ 4)$ déterminer $P(2,5 < Y < 6,5)$.
4. Si Y suit la loi normale $N(6,\ 4)$ déterminer un intervalle, centré sur la moyenne dans lequel est Y prend ses valeurs avec la probabilité $0,9$.

Exercice 5 Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et x un réel positif.

1. Exprimer en fonction de $P(|X| > x)$ les probabilités $P(X > x)$ et $P(X < -x)$.
2. Lors d'un tir, on admet que les longueurs de tir suivent une même loi normale (paramètres inconnus). On constate en ayant effectué un grand nombre de tirs que 10% des obus tombent à une distance supérieure à 1,6 km et 25% une distance à inférieure à 1,4 km. Donner une valeur approchée de la moyenne et de l'écart-type de la loi normale suivie par les longueurs de tir.

Exercice 6 La variable X suit une loi normale de moyenne 2. La probablilite que $|X - 2| > \ 0,3$ est de 10%. Quelle est la probabilité que $|X - 2| > \ 0,6$?

Exercice 7 Le pH de l'urine d'un adulte sain est une variable aléatoire normale de loi $N(6,25, \ (0,36)^2)$. Déterminer un intervalle, centré autour de la moyenne, où se trouve la mesure du pH urinaire pour 75% des adultes sains.

Exercice 8 Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamètre qui est une variable aléatoire E suivant une loi normale de moyenne 0mm et d'écart-type 0,015mm. Lors du contrôle de fabrication on écarte les billes qui passent à travers une bague de diamètre $7,98$mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8,02 mm.
Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard soit écartée?

Exercice 9 Une compagnie produit des morceaux en acier pour l'aeronautique. La longueur des morceaux est distribué selon une loi normale avec moyenne 200 (mm) et une variance de $0,144$. Un type d'erreur de production (appelé erreur L, comme longueur) de production est qu'un morceaux est plus court que 199mm ou bien plus large que 201mm.

1. Quelle est la probababilité qu'un morceaux choisi au hasard présente le défaut L?
2. La production annuelle est de 2000 pieces. Quelle est (de façon approché) la probabilité d'avoir plus que 30 (20) morceaux défectueuses de type L?

Exercice 10 On désigne par $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les rendements en quintaux par hectare de n parcelles ensemencées avec une même variété de céréale. On suppose que ces variables sont indépendantes et suivent toutes la même loi normale $N(\mu, \ \sigma^2)$. Soit la variable aléatoire moyenne $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de M.
2. Quelle est la loi de M?
3. On suppose que l'écart-type $\sigma = 2,5$. Combien de parcelles faut-il observer pour que $P(\mu - 1 < M < \mu + 1) > 0,99$?