Projet de TER,

Espaces (pré)-duaux d'espaces de Banach

Bernhard Haak

Le but de ce sujet est d'étudier d'avantage les espaces duaux afin d'attaquer une question naturelle: quand est-ce qu'un espace de Banach est un espace dual?
Pendant qu'on peut construire une chaîne d'espaces duaux d'un espace de Banach de la forme X, puis $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$, puis $X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{C})$, puis $X''' = \mathcal{L}(X'', \mathbb{C}) \ldots$ il est moins clair quand un espace de Banach X peut être vu comme un dual d'un autre espace de Banach Y, c'est à dire $Y' \simeq X$. On dit que X admet un «pré-dual» dans ce cas.
Commençons avec un exemple facile: $X = c_0, X' \simeq \ell_1, X'' \simeq \ell_\infty, \ldots$ mais est-ce que c_0 est un espace dual lui-même? La réponse est non. Une justification possible de ce fait est que la boule d'unité de c_0 n'admet pas de points «extrémaux.». Pour comprendre cet argument on étudiera deux théorèmes classiques, celui de Banach-Alaoglu-Bourbaki et celui de Krein-Milman.
La deuxième partie du sujet est l'étude d'un théorème de Kaijser garantissant l'existence d'un pré-dual. Comme application on étudie l'espace BMO (par simplicité sur $\mathbb{R}$) constitué de certaines fonctions localement intégrables. En effet, pour un intervalle compact I, on désigne par $E_I(f)$ la moyenne 'locale' de f sur I, c'est à dire

$$E_I(f) = \tfrac{1}{|I|} \int_I f(x)\, dx$$

et par $E_I^2(f)$ la 'variance locale' de f sur I, c'est à dire

$$E_I^2(f) = E_I\big(|f - E_I(f)|^2\big).$$

On dit maintenant que f appartient à BMO si $\sup_I \big(E_I^2(f)\big)^{1/2} < \infty$ (le sup étant pris sur tous les intervalles finis). Le sigle BMO désigne "**b**ounded **m**ean **o**scillation" donc fonction à oscillation borné en moyenne. Grâce au théorème de Kaijser on trouve un pré-dual à BMO d'être un autre espace de fonctions, dit H^1. Cette dualité H^1-BMO est un résultat célèbre de l'analyse harmonique.

Le sujet s'appuie sur le cours d'analyse fonctionnelle de M 1, en particulier on étudie davantage des espaces duaux, la topologie faible* et des conséquences du théorème de Hahn-Banach.

Littérature:

[1] Haim Brezis : *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications* page 42 (pour le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)

[2] Walter Rudin : *Analyse fonctionnelle* page 72 (pour le théorème de Krein-Milman)

[3] Sten Kaijser: *A note on dual Banach spaces*, Math Scand. 41 (1977) p. 325-330 (le théorème de Kaijser et l'application sur H^1-BMO)