Self-test, Durée : 3h00

Ni documents, ni équipements électroniques ne sont autorisés.

Question 1 Soit

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{R}^2 \backslash B[2^n, n]\right)$$

Est-ce que A est ouvert ou pas? Justifier votre réponse. Le complément de A est $A^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B[2^n, n]$ On observe que 2^n croit beaucoup plus vite que n. De ce fait, à partir de $n = 4$ on a une union dénombrable de fermés, avec une distance mutuelle strictement positive:

$$\begin{aligned} A^C =& B[2,1] \cup B[4,2] \cup B[8,3] \cup B[16,4] \cup \bigcup_{n>4} B[2^n, n] \\ =& [1,3] \cup [2,6] \cup [5,11] \cup [12,20] \cup \bigcup_{n>4} B[2^n, n] \\ =& [1,11] \cup [12,20] \cup \bigcup_{n>4} B[2^n, n] \end{aligned}$$

Une suite de A^C qui converge dans $\mathbb{R}$ est Cauchy et de ce fait stationnaire soit dans $I = [1, 11]$ soit dans une intervalle $I = [2^n - n, 2^n + n]$ pour $n > 3$. Or tous ces intervalles sont fermés, la limite est contenu dans I. Aisni, A^C est fermé, donc A ouvert.

Question 2 Soit

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq e^{-x^2}\} \qquad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geq |x|\}$$

(a) *Est-ce que B ou C sont compacts? Justifier vos réponses.* B n'est pas borné ($(x,0) \in B$ pour tout x!) donc non-compact. C n'est pas borné ($(0,y) \in C$ pour tout y!) donc non-compact.

(b) *Qu'en est-il pour $B \cap C$ et $B \cup C$? Justifier vos réponses.*
$B \cup C$ est non-borné donc non-compact. Par contre, $B \cap C$ est borné car $|x| \leq |y| \leq e^{-x^2}$ implique $|x| e^{x^2} \leq 1$ donc x borné, puis y aussi. De plus, B, C sont fermés comme image reciproques de fermés de $\mathbb{R}$ sous une application continue: $B = f^{-1}([0,\infty))$ où $f(x,y) = e^{-x^2} - |y|$ (continue!) et $C = g^{-1}([0,\infty))$ où $g(x,y) = |y| - |x|$.

Question 3 Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + 2xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Discuter la continuité et différentiabilité de f en tout point de $\mathbb{R}^2$. Quel est le plus grand ouvert sur lequel f est de classe C^1? On applique le *flowchart*. D'abord, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annulle pas. Pour $r > 0$, $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = |r(\cos^2\theta \sin\theta + 2r\cos\theta\sin^3\theta)| \leq r(1+r) \to 0$ quand $r \to 0$. Donc f continue sur $\mathbb{R}^2$. Ensuite, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables dont le dénominateur ne s'annulle pas. Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,

$$f_x(x,y) = \frac{(2xy+2y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^2y+2xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2y^3(x^2-y^2-x)}{(x^2+y^2)^2}$$

On observe $f_x(x,0) = 0$ et $f_x(x,x) = 1/2$ pour $x \neq 0$, de ce fait f_x est discontinu en $(0,0)$. De ce fait, $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. Reste a voir si f est différentiable en $(0,0)$: d'abord,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \qquad f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

donc $\text{grad}(f)(0,0) = (0,0)$. Si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle $D_f(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est donné par le produit scalaire avec $\text{grad}(f)(0,0)$, donc l'application nulle. On étudie alors

$$f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \langle (0,0) \|, (h,k) \rangle = f(h,k).$$

Or $\frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^3}} \not\to 0$ lorsque $(h,k) \to (0,0)$, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Conclusion: le plus grand ouvert sur lequel f est de classe C^1 est $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

Question 4 *Déteminer les lieux et nature des extrema locaux de la fonction $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2$. Justifier vos étapes.* On calcule

$$\nabla f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\ (y - 2x^2y, x - 2xy^2)$$

Un point critique satisfait donc $y = 2x^2y$ et $x = 2xy^2$. Ainsi ou bien $y = 0$ (et donc $x = 0$), ou bien $x^2 = 1/2$ et donc $y^2 = 1/2$. On a donc cinq points critiques:

$$x_1 = (0,0), x_2 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), x_3 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}), x_4 = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), x_5 = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

On calcule la matrice Hessienne:

$$H(x,y) = e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} 4x^3y - 6xy & (4y^2-2)x^2 - 2y^2 + 1 \\ (4y^2-2)x^2 - 2y^2 + 1 & 4xy^3 - 6xy \end{pmatrix}$$

Evalué aux cinq points on a

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_2 = H_5 = \tfrac{1}{e}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad H_3 = H_4 = \tfrac{1}{e}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a un min. local en x_3 et x_4, puis un maximum local en x_1 et x_5. En x_0 on a un point selle (val. propres ± 1).

Question 5 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2y + 4x, x + y)$. Déterminer les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ dans lesquelles f admet une inverse locale. Justifier vos étapes. Soit g une inverse locale dans un voisinage de $(0,0)$. Calculer la matrice Jacobienne de g en $(0,0)$.* Observons que f est de classe C^1 (même C^∞). La matrice Jacobienne est

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 4 & x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(J_f(x,y)) = 4 + 2xy - x^2$$

On a donc $J_f(x,y)$ inversible ssi $4 + 2xy - x^2 \neq 0$ ssi $4 + y^2 \neq (x-y)^2$ ssi $x \neq y \pm \sqrt{4+y^2}$. Clairement, $J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et $f(0,0) = (0,0)$. Or, $J_g(0,0) = J_f(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 6 *Montrer qu'il existe un voisinage U de $(0,e) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ tel que $g(0,e) = 2$ et que*

$$\forall x, y \in U : \qquad y^2 + xg(x,y) + (g(x,y))^2 - \exp(g(x,y)) = 4.$$

Justifier vos étapes. Déterminer $\frac{\partial}{\partial x}g(0,e)$. Soit $f(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$. Clairement f est de classe C^1. Son gradient est $\mathrm{grad} f(0,e,2) = (2, 2e, 4 - e^2)$. On observe $4 - e^2$ non-nul donc inversible. Par le thm des fonctions implicites il existe une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ tel que $g(0,e) = 2$ et que $f(x,y,g(x,y)) = 4$ sur U. De plus,

$$\frac{\partial}{\partial x}g(0,e) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(0,e,2)}{\frac{\partial}{\partial z}f(0,e,2)} = \tfrac{2}{e^2-4}.$$

— FIN —