Ex1:

a)(i) Si B est dense, i.e. $\overline{B} = M$

$A = A \cap M = A \cap \overline{B}$.

en même temps, $A \cap B$ peut être très "petit":

p. ex. $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

ou $A \cap \overline{B} = \mathbb{Q}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap B} = \emptyset$.

(pareil avec $A = \mathbb{Q}$, $B = \pi + \mathbb{Q} = \{\pi + q : q \in \mathbb{Q}\}$

(pourquoi?!)

(ii) On peut réutiliser l'ex. ci-dessus:

$A = \mathbb{Q}$, $B = \pi + \mathbb{Q}$.

$A \cap B = \emptyset$ (sinon $\pi \in \mathbb{Q}$)

mais $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

(iii) à nouveau, l'exemple fonctionne!

$A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$\emptyset = A \cap B = \overline{A \cap B} \neq \mathbb{R} = \overline{A}$.

(iv) et à nouveau, l'ex. fonctionne:

$A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

tous les deux sont denses, mais

$A \cap B = \emptyset$ ne l'est pas.

b) On suppose A ouvert.

(i) Si $x \in A \cap \overline{B}$, $x \in A$ et $\exists\ (x_n) \subset B$ t.q. $x_n \to x$.

Puisque A est ouvert et $x \in A$, il ex. $r>0$: $B(x, r) \subseteq A$.

Par déf. $x_n \to x$ si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_\varepsilon : \forall\, n \geq N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon$.
On choisit ici $\varepsilon = r$.
Ainsi, $\forall\, n \geq N_r : d(x_n, x) < r \iff x_n \in B(x, r)$.

ceci implique que $x_n \in A\ \ \forall\, n \geq N_r$.

On a donc avec $\tilde{x}_n \overset{\text{def}}{:=} x_{n+N_r}$ une suite

qui converge vers x et qui satisfait

$(\tilde{x}_n) \subset A \cap B$. Ainsi $x = \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{x}_n \in \overline{A \cap B}$.

(ii) Par contraposé :
$A \cap \overline{B} \neq \emptyset \overset{(i)}{\Longrightarrow} \overline{A \cap B} \neq \emptyset \overset{(!)}{\Longrightarrow} A \cap B \neq \emptyset$

(iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A}$:

"$\subseteq$" : $A \cap B \subseteq A$ donc $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$.
"$\supseteq$" $A = A \cap \overline{B} \overset{(i)}{\subseteq} \overline{A \cap B}$ donc $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A \cap B}}$
$= \overline{A \cap B}$.

(iv) $\overline{A \cap B} \overset{(iii)}{=} \overline{A} = M$ par hypothèse.

Ex 2

A) • Si $x \in B(0,1)$, $\|x\| < 1$. $\Rightarrow B(x, 1-\|x\|) \subset B(0,1)$

ainsi, avec $x \in B(0,1)$ tout un voisinage de x est inclus dans $B(0,1)$ d'où $B(0,1)$ ouvert.

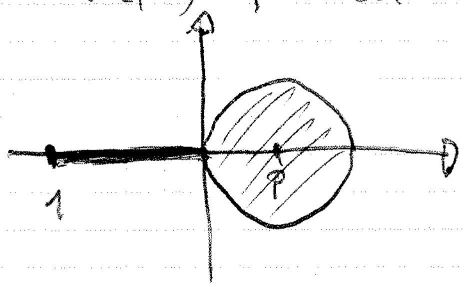
• Si $x, y \in B(0,1)$, $\lambda \in]0,1[$, on a

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \leq \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\|$$
$$< \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$$

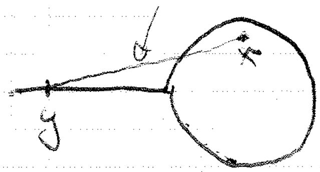
donc $\lambda x + (1-\lambda) y \in B(0,1)$. Donc convexe.

• $0 \in B(0,1)$ est évident.

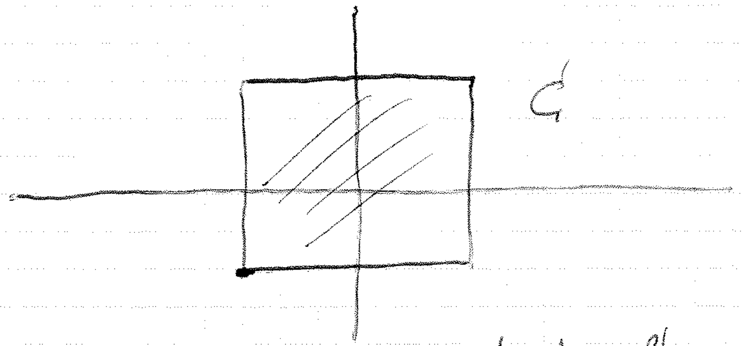
Si on prend $\mathbb{R}^2$ avec la métrique SNCF où Paris $= (1/2, 0)$, on a la représentation



de $B_d(0,1)$. Ceci n'est pas convexe!



(3)



Un convexe qui contient l'origine.

$\{x : \quad p_C(x) = 1\}$

$= \{x : 1 = \inf_{\alpha > 0} \text{ t.q. } \frac{x}{\alpha} \in C\}$

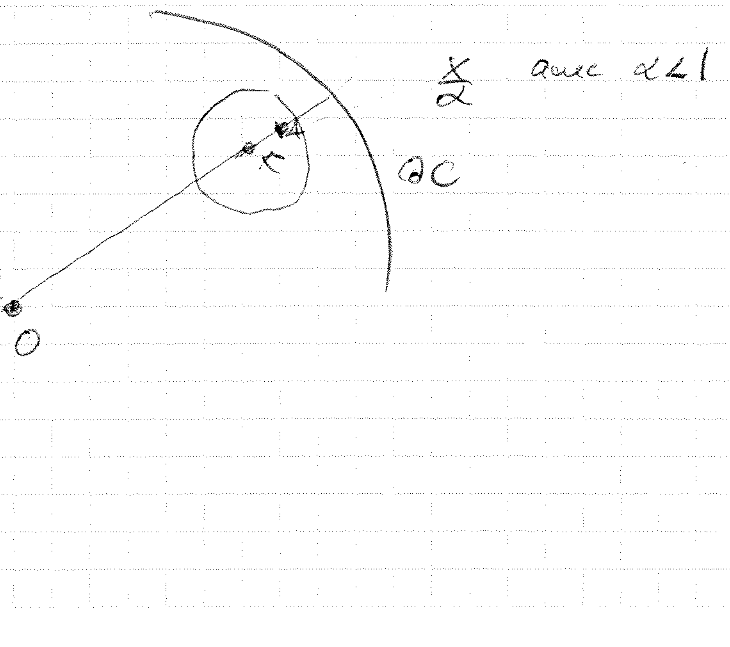
$= \{x : \quad \forall \alpha < 1 : \frac{x}{\alpha} \notin C\} \cap \{x : \exists (\alpha_n), \ \alpha_n > 1 \text{ et } \alpha_n \to 1 \text{ t.q. } \frac{x}{\alpha_n} \in C\}$

puisque $\alpha_n \to 1+$ et $\frac{x}{\alpha_n} \in C$ impliquent $x \in \overline{C}$

et $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{x}{\alpha} \notin C$ impliquent $x \notin C^{0}$ (*)

on a $\{x : \quad p_C(x) = 1\} = \partial C$.

dem de (*) Si $x \in C^{0} \Rightarrow B(x, r) \subset C$.



on trouve facilement un

$\alpha < 1$ t.q. $\frac{x}{\alpha} \in B(x, r) \subseteq C$.

(b) $$p_C(\lambda x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \lambda > 0 : \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \right\}$$

$$= \lambda \cdot \inf \left\{ \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) > 0 : \frac{x}{(\alpha/\lambda)} \in C \right\}$$

$$= \lambda \cdot p_C(x).$$

(c) Si $p_C(x) < 1 \Rightarrow \exists\, \alpha < 1$ t.q. $\frac{x}{\alpha} \in C$

$$\Rightarrow \quad \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} + (1-\alpha) \cdot 0 = x \in C$$

puisqu'il s'agit d'une comb. convexe de deux éléments de C

(d) Soit $x \in C$. C étant ouvert, $\exists\, r > 0$: $B(x,r) \subseteq C$.

(e) Soit $\underbrace{x \in C,\ r}_{\text{comme dessus.}}$ ~~...~~ $\left\| x - x\left(1 + \frac{r}{2\|x\|}\right) \right\|$

$$= \left\| x \left(1 - 1 - \frac{r}{2\|x\|}\right) \right\|$$

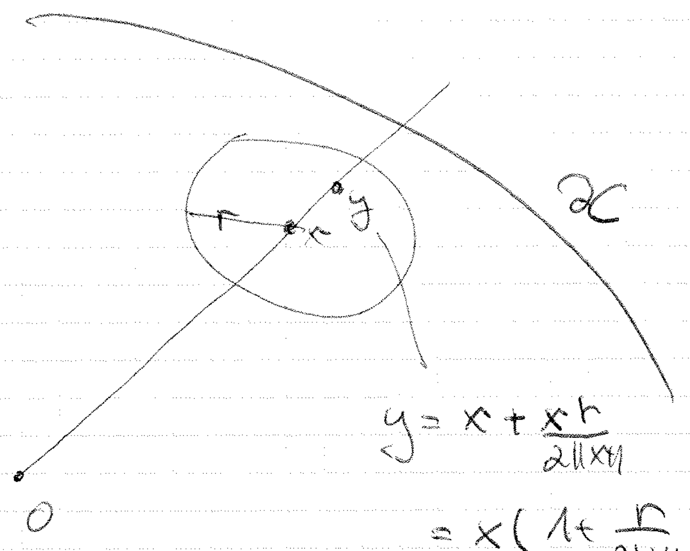
$$= \left\| x \cdot \frac{r}{2\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|\, r}{2\, \|x\|} = \frac{r}{2} < r.$$

$$\Rightarrow \quad x\left(1 + \frac{r}{2\|x\|}\right) \in B(x,r).$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{r}{2\|x\|}} < 1$$ satisfait $\frac{x}{\alpha} \in C$.

donc $p_C(x) < 1$.

Ceci n'est pas une sol. miraculeuse !



$$y = x + \frac{x \cdot r}{2\|x\|}$$

$$= x\left(1 + \frac{r}{2\|x\|}\right)$$

est un multiple de x, donc sur la droite donné par O et x.

Le facteur $1 + \frac{r}{2\|x\|}$ est bricolé t.q. $\|x - y\| < r$.

(f) $O \in C$, C ouvert $\Rightarrow \exists\, r > 0 : B(O, r) \subset C$.

Si $x \in E$, $y = \frac{x \cdot r}{2\|x\|} \rightsquigarrow \|y\| = \frac{\|x\| \cdot r}{2\|x\|} = \frac{r}{2} < r$

donc $y \in B(O, r) \subseteq C$.

$\overset{(e)}{\Rightarrow}$ $p_C(y) < 1 \iff p_C\left(\frac{x \cdot r}{2\|x\|}\right) < 1$

$\overset{(b)}{\iff}$ $\frac{r}{2\|x\|} \cdot p_C(x) < 1$

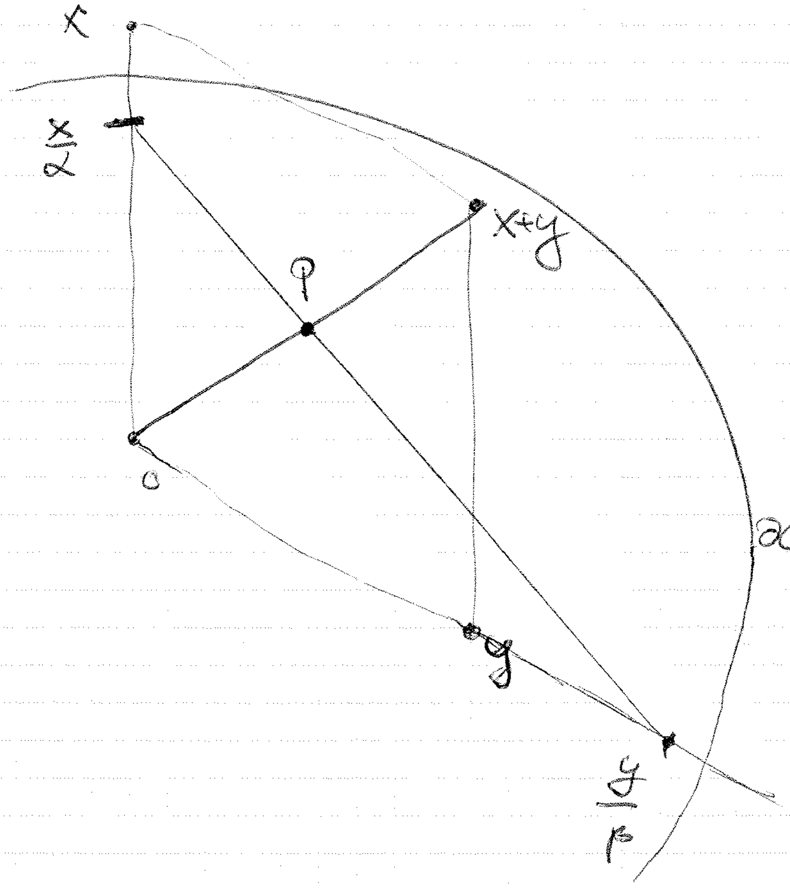
$\iff$ $p_C(x) < \frac{2\|x\|}{r}$

(g) (i) $p_C(x+\lambda x) = p_C(x\cdot(1+\lambda)) \overset{(b)}{=} (1+\lambda)\, p_C(x)$

$$= p_C(x) + \lambda\, p_C(x)$$

$$\overset{(b)}{=} p_C(x) + p_C(\lambda x)$$

(ii)



(iii) P est sur la droite donné par 0 et $x+y$
donc $\exists!\ \gamma > 0 : \quad P = \gamma(x+y)$.

(iv) P est comb convexe de $\frac{x}{\alpha}$ et $\frac{y}{\beta}$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in]0,1[: \quad \frac{\lambda}{\alpha}\cdot x + \frac{(1-\lambda)}{\beta}\, y = P = \gamma x + \gamma y$

(v) Ceci dit $\left(\frac{\lambda}{\alpha} - \gamma\right)\cdot x + \left(\frac{(1-\lambda)}{\beta} - \gamma\right) y = 0$

$\Rightarrow$ (x, y lin. indép) $\quad \frac{\lambda}{\alpha} - \gamma = 0$ et $\frac{1-\lambda}{\beta} - \gamma = 0$

où $\gamma = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1-\lambda}{\beta}$

(vi) $\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1-\lambda}{\beta} \iff \lambda\cdot\beta = \alpha - \alpha\lambda$

$\iff \lambda(\alpha+\beta) = \alpha$

$(\alpha+\beta>0)$ $\iff \lambda = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $\quad \left((1-\lambda) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$

$\Rightarrow \gamma = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\alpha+\beta}.$

(vii) P étant dans C (car C convexe),

$p_C(x+y) = \inf\{\alpha>0 : \frac{x+y}{\alpha} \in C\}$

$\leq \frac{1}{\gamma} = \alpha+\beta.$

(viii) + (ix) L'inégalité $p_C(x+y) \leq \alpha+\beta$ est vrai pour tout $\alpha,\beta>0$ t.q. $\frac{x}{\alpha}$ et $\frac{y}{\beta} \in C$.

$\Rightarrow p_C(x+y) \leq \inf\{\alpha>0 : \frac{x}{\alpha}\in C\} + \beta$

$= p_C(x) + \beta$

Ceci est vrai pourtant β t.q. $\frac{y}{\beta} \in C$

$\Rightarrow p_C(x+y) \leq p_C(x) + \inf\{\beta>0 : \frac{y}{\beta}\in C\}$

$= p_C(x) + p_C(y).$

fin.