Exercice 1 Déterminer lesquelles des applications suivantes de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définissent des distances sur $\mathbb{R}$.

(a) $d_1(x, y) = x - y$;

(b) $d_2(x, y) = |x - y|$;

(c) $d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$;

(d) $d_4(x, y) = |x^3 - y^3|$;

(e)
$$d_5(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

(f) Soit (M, d) un espace métrique et $L \in M$ fixé.
$$d_6(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ d(x, L) + d(L, y); & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

Exercice 2 Si d définit une distance sur un ensemble X on appelle
$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$
la boule ouverte de rayon r autour de x (par rapport à la distance d). Décrire les boules ouvertes de rayon 1/2, de rayon 1 et de rayon 2 autour de π pour les topologies d_2, d_5, et d_6 de l'exercice 1. Que peut on dire sur les topologies associées avec ces distances?

Exercice 3 Donner un exemple de deux distances d et $\widetilde{d}$ sur $\mathbb{R}$ telle que les topologies associées ne sont pas pareilles.

Exercice 4 Déterminer lesquelles des applications suivantes de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définissent des distances sur $\mathbb{R}^2$.

(a) $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1|$;

(b) $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$;

(c) $d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2$;

(d) $d_4((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

(e) Soit $(\mathbb{R}^2, d)$ un espace métrique et $P = (0, 0)$.
$$d_5(v, w) = \begin{cases} 0, & \text{si } v = w; \\ d(v, w), & \text{si } v, w \text{ et } P \text{ sont alignés} \\ d(v, P) + d(P, w) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 5 Dessiner les boules de rayon 2 autour des points $(0,0)$ et $(1,0)$ pour les distances d_2 et d_5 au dessus.

Exercice 6 Montrer que la boule d'unité par rapport à une norme (c'est à dire $\{x : \|x\| < 1\}$ est convexe. Donner un exemple d'une métrique dont la boule d'unité n'est pas convexe.

Exercice 7 Déterminer pour lesquelles des distances dans les exercices 1 et 2 la fonction

$$N(x) = d(x,0)$$

définit une norme.

Exercice 8

(a) Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que l'application qui à tout élément $(x,y) \in X^2$ associe le nombre

$$d_1(x,y) = \min(1, d(x,y))$$

définit une distance sur X et que les topologies induites par les deux distances sont les mêmes.

(b) Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que l'application qui à tout élément $(x,y) \in X^2$ associe le nombre:

$$d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

est une distance. (Indication: Démontrez l'inégalité $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$ pour la fonction $f(x) = \frac{x}{1+x}$ sur $[0,+\infty[$)

Exercice 9 Soit $C([0,1])$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si les applications suivantes définissent des distances et/ou des normes sur $C([0,1])$. Dans le cas échéant, déterminer si la fonction $f(x) = 2x + \frac{1}{2}$ est un élément de la boule ouverte de rayon 1 autour de la fonction $g(x) = x^2$.

(a) $d(f,g) = \int_0^1 f(x) - g(x)dx$;

(b) $d(f,g) = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx$;

(c) $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$;

(d) $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

Pour lesquelles des distances est-ce que l'ensemble $\{f \in C([0,1]) : \frac{1}{2} < f(x) < 1\}$ est ouvert dans la topologie déterminée par la distance?

Exercice 10 Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts et/ou fermés

$$]0,1[; \qquad \{1\}; \{1,2\};]0,2]$$

dans $\mathbb{R}$ muni avec les distances de l' exercice 1.