Exercice 1 Soit $\mathbb{R}^2$ muni avec la distance usuelle (euclidienne).

(a) Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts et/ou fermé.

$$\{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1 \text{ et } x_2 = 0\}; \{(0, 1)\};$$

$$\{(x_1, x_2) : 0 < |x_1| < 4 \text{ et } |x_2|^2 < 2\}; \{(x_1, x_2) : |x_1| < 1\}.$$

(b) Trouver l'adhérence et l'intérieure de l'ensemble

$$E = \{(x_1, x_2) : 0 < |x_1| < 4 \text{ et } |x_2| < 2\} \cup \{(5, 5), (5, 6)\}.$$

Montrer que chaque point dans l'adhérence est la limite d'une suite dans E et que chaque point dans l'intérieur est le centre d'une boule de rayon $\epsilon > 0$.

Exercice 2 Calculer

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B(0, 1 + \frac{1}{n}) \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{B}(0, 1 - \frac{1}{n}).$$

Que peut on en conclure?

Exercice 3 Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y) =$ distance de x à A.

(a) Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$.

(b) Pour $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ on pose:$V_\epsilon(A) = \{x \in E : d(x, A) < \epsilon\}$. Montrer que $\overline{A} = \cap_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*} V_\epsilon(A)$.

(c) Soit $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = \{2, 3\}.$, $A_3 =]0, 1]$ Trouver les fonctions: $x \to d(x, A_i)(i = 1, 2, 3)$. Sont-elles continues? Que peut on dire en générale?

Exercice 4 Soit c_0 l'ensemble des suites de réels tendant vers 0. Soit d définie par

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n|; n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Montrer que d est une distance sur E.

(b) Soit c_{00} la partie de c_0 constitué des suites nulles à partir d'un certain rang. Est-ce que c_{00} est dense dans E ?

(c) Les ensembles

$$\{(x_n) \in c_0 : \ \forall n : |x_n| < 1\} \quad \text{et} \quad \{(x_n) \in c_0 : \ x_5 = 1\}?$$

sont-ils ouverts ou fermés ou ni l'un ni l'autre? Qu'est-ce qu'il en est avec l'ensemble $\{(x_n) \in c_0 : \ |x_{12}| < 1\}$?

Exercice 5 Soit E un espace métrique, et A et B deux parties de E. Est-ce qu'on a (démonstration ou contre-exemple)

(a) $A \subset B \implies \overline{A} \subset B$?

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$?

(c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

Exercice 6 Calculer les frontières et intérieures des ensembles suivantes dans $\mathbb{R}^2$ munie de la distance euclidienne et de la distance

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$,

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$,

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 7 Soit (E, d) un espace métrique.

(a) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites qui convergent vers x et y respectivement, alors la suite $(d(x_n, y_n))_{n\geq 0}$ converge vers $d(x, y)$.

(b) On dit qu'une suite (x_n) est bornée si et seulement si il existe $y \in E$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\sup_n d(x_n, y) < M$. Est-ce que une suite bornée est toujours convergente (démonstration ou contre-exemple)? Est-ce que une suite convergente est toujours bornée?

Exercice 8 Déterminer si les suites suivantes sont bornées et ou convergentes et / ou de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne d:

$$w_n = (3, \frac{n^3}{1 + n^5}); \quad z_n = (n, \cos n).$$

Répondre aux mêmes questions pour $\mathbb{R}^2$ muni de la distance discrète et de la distance $D((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d((x_1, x_2), (y_1, y_2)), 2))$.

Exercice 9 Décrire les suites convergentes dans $\mathbb{R}$ muni de la distance discrète.

Exercice 10 Montrer que $]0, 1[$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ n'est pas complet.

Exercice 11 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels. Lesquelles des applications suivantes définissent des normes sur E?

(a) L'application $N(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$.

(b) L'application $N(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$;

(c) L'application $N(\sum_{i=0}^n a_i x^i) = \sum_{i=0}^n |a_i|$.

Pour lesquelles de ces applications est-ce que la suite $P_m(x) = x^n + \frac{x}{m+1}$ est convergente? Pour lesquelles est-ce que l'ensemble $\{\sum_{i=0}^n a_i x^i : a_1 = 5\}$ est fermé? Justifier.