Continuité et images reciproques

Exercice 1 Soit (E,d) et $(F,\tilde{d})$ des espaces métriques. Soit f une fonction $f : E \to F$.

(a) Montrer que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pour tout $A \subseteq E$ si f est continue.

(b) Montrer que f est continue si $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pour tout $A \subseteq E$. On décompose la démonstration:

(i) Soit $B \subseteq F$ un fermé quelconque. On pose

$$A = f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : \ f(x) \in B\}.$$

Montrer que $f(\overline{A}) \subseteq B$.

(ii) Déduire que $\overline{A} \subseteq A$.

Trouver un exemple ou $f(\overline{A}) \neq \overline{f(A)}$.
Si vous voulez véifier d'avoir bien compris cet exercice, montrer d'une façon similaire à la maison : f est continue si et seulement si pour tout $B \subset F$ on a $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$.

Exercice 2 Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et $\tilde{d}$ la distance discrète sur $\mathbb{R}$. Déterminer si les fonctions suivantes sont continues. Que peut on dire en générale?

(a) $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \tilde{d})$; $\quad f(x) = x^2$;

(b) $f : (\mathbb{R}, \tilde{d}) \to (\mathbb{R}, d)$; $\quad f(x) = x^2$;

(c) $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \tilde{d})$; $\quad f(x) = 3$.

Des espaces produits

Exercice 3 Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et $d \times d$ la distance produit sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Déterminer si les fonctions suivantes sont continues.

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d \times d) \to (\mathbb{R}, d)$; $\quad f(x_1, x_2) = \cos(x_1)$

(b) $f : (\mathbb{R}^2, d \times d) \to (\mathbb{R}^2, d \times d)$; $\quad f(x_1, x_2) = (\cos(x_1), 2)$

(c) $f : (\mathbb{R}^2, d \times d) \to (\mathbb{R}^2, d \times d)$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1 \geq x_2; \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(d) $f : (\mathbb{R}^2, d \times d) \to (\mathbb{R}^2, d \times d)$,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1 \geq x_2 A; \\ x_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4* Soit (E,d) un espace métrique. On munit $E \times E$ avec la topologie produit.

(a) L'ensemble $A = \{(x,x) :\ x \in E\}$ est-il nécessairement fermé? Peut-il être ouvert?

(b) Soit $B = \{(f(x), g(x)) :\ x \in E\}$ si f et g sont des fonctions continues de E dans E. Est B nécessairement fermé? Peut-il être ouvert?

(c) Qu'est-ce qui en est dans la question précedente, si on suppose en plus que E est compact?

Application linéaires

Exercice 5 Considérer les applications suivantes. Sont-ils linéaires? Si oui, sont ils contiues? Si oui, calculer leur norme!

(a) $T : (\mathbb{R}^{42}, \|.\|_2) \to \mathbb{R}$, $T(x_1 \dots x_{42}) = x_{12}$.

(b) Soit $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$ fixés.

 (i) $T : (\mathbb{R}^n, \|.\|_1) \to \mathbb{R}$, $T(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

 (ii) $T : (\mathbb{R}^n, \|.\|_2) \to \mathbb{R}$, $T(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$?

 (iii) $T : (\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$, $T(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$?

(c) $T : C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $(Tf)(t) = f(t) + f'(t)$?

(d) $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $Tf = f(0) + f(1)$?

(e) $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $Tf = \left(f(0)^2 + f(1)^2\right)^{1/2}$?

(f) $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $Tf = \max\{f(x) :\ x \in [0,1]\}$?

(g) $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $Tf = \int_0^1 x f(x)\, dx$?

(h) $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, $Tf = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$?

(i) $T : C([0,1]) \to C([0,1])$, $(Tf)(t) = \sin(\pi t) f(t)$?

(j) $T : C([0,1]) \to C([0,1])$, $(Tf)(t) = \sin(f(t))$?

(k) Soit E d'espaces des suites réelles convergentes muni de la norme sup, c'est à dire, $\|(x_n)\| = \max_{n \geq 0} |x_n|$. $T : E \to \mathbb{R}$, $T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$?

(l) Soit F d'espaces des suites réelles bornées muni de la norme sup, c'est à dire, $\|(x_n)\| = \max_{n \geq 0} |x_n|$. $T : F \to \mathbb{R}$, $T(x_n) = \limsup_{n\to\infty} x_n$?

Exercice 6* Soit $\mathbb{P}_n$ ($n \geq 2$) l'espace des polynômes réels de degré $\leq n$ et $\mathbb{P}$ l'espaces de tous les polynômes réels. On muni $\mathbb{P}_n$ et $\mathbb{P}$ avec la norme $\|p\| = \sup_{x \in [0,1]} |p(x)|$.

(a) Soit $T : \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}$ donné par $T(p) = p(2)$. Est-elle linéaire? Est-elle continue?

(b) Soit $T : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ donné par $T(p) = p(2)$. Est-elle linéaire? Est-elle continue?