université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
PREMIÈRE SESSION

Collège Sciences et technologies

Licence 3, Topologie (transitoire)
Durée : 3h00
Documents : non autorisés
La calculatrice homologuée est le seul matériel électronique autorisé.

Version B

Pour les questions à choix multiples, il *zéro, une ou plusieurs* réponses sont correctes. Pour des question vrai/faux évidemment une seule est correcte. Toute proposition justement cochée donnera $+1$ point, toute proposition non cochée donnera zéro points et toute proposition cochée par erreur donnera -1 points. La somme des points par question à choix multiples ne pouvant être négative, elle sera compté comme nulle si le nombre d'erreurs dépasse le nombre de réponses correctes. **Il est donc vivement déconseillé de cocher "au hasard" sans être sûr de la réponse.** Le nombre de points obtenus est ensuite pondéré avec le barème indiqué.

Numéro d'anonymat ☐

Question 1 *(Barème indicatif: 0.5 points par question)* Répondre vrai / faux dans les questions suivantes:

(a) Tout espace métrique peut être vu comme espace topologique.
☐ vrai ☐ faux

(b) Réciproquement, toute topologie sur X provient d'une distance convenable sur X
☐ vrai ☐ faux

(c) Sur un ensemble non-vide arbitraire on peut toujours définir une topologie.
☐ vrai ☐ faux

(d) $\mathbb{R}$ est quasi-compact pour la topologie usuelle.
☐ vrai ☐ faux

(e) $\mathbb{R}$ est quasi-compact pour la topologie discrète (induit par le distance discrète).
☐ vrai ☐ faux

(f) $\mathbb{R}$ est quasi-compact pour la topologie co-finie (ouverts sont l'ensemble vide et le complémentaire de toute partie finie).
☐ vrai ☐ faux

(g) L'union de deux topologies sur X en est une autre.
☐ vrai ☐ faux

(h) L'intersection de deux topologies sur X en est une autre.
☐ vrai ☐ faux

(i) Sur $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\big\}$ est une topologie.
☐ vrai ☐ faux

(j) Sur $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}\big\}$ est une topologie.
☐ vrai ☐ faux

(k) Il existe un espace topologique fini X, avec une topologie non-dénombrable.
☐ vrai ☐ faux

(l) Il existe un espace topologique non-dénombrable X, avec une topologie finie.
☐ vrai ☐ faux

(m) On peut associer à tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ un autre espace topologique, appelé l'espace complément, par $(X, \mathcal{S})$ où $\mathcal{S} = \{\mathcal{O}^{\complement} : \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$.
☐ vrai ☐ faux

Question 2 *(Barème indicatif: 1 point)* Expliciter toutes les topologies sur un ensemble $X = \{x\}$ à un seul point.

Question 3 *(Barème indicatif: 1.5 + 1.5 + 2 points)*

(a) Soit (X, d_X) un espace métrique. On considère les trois assertions suivantes:

(i) La suite (x_n) converge.

(ii) La suite (x_n) est Cauchy.

(iii) La suite (x_n) est bornée.

Lesquelles des assertions suivantes sont vraies (sans hypothèses supplémentaires sur X)? Pensez à la transitivité des implications.

☐ $(i) \Rightarrow (ii)$	☐ $(i) \Rightarrow (iii)$
☐ $(ii) \Rightarrow (i)$	☐ $(ii) \Rightarrow (iii)$
☐ $(iii) \Rightarrow (i)$	☐ $(iii) \Rightarrow (ii)$

(b) Donner un contre-exemple pour chaque implication fausse ci-dessus.

(c) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces métriques. Supposons que X est complet et qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X : \qquad d_Y(\, f(x), f(y)\,) \quad \geq \quad \delta\, d_X(\, x, y\,) \qquad (*)$$

Montrer que $f(X) = \{f(x) :\ x \in X\}$ est une partie fermé de Y.

Indication: on pourra commencer avec une suite $f(x_n)$ qui converge dans Y . . ..

Question 4 *(Barème indicatif: 3 points)* On munit $A \subset \mathbb{R}$ de la topologie induite par la topologie habituelle de $\mathbb{R}$. Pour chaque couple (A, B) ci-dessous, déterminer si B est ouvert, fermé ou compact, ou si B n'a aucune de ces propriétés.

		ouvert	fermé	compact	aucune
$A = [0, 1]$	$B = [1/4, 1/2] \cup [2/3, 1[$	☐	☐	☐	☐
$A = [0, 1]$	$B = [1/4, 1/2] \cup [2/3, 1]$	☐	☐	☐	☐
$A =]0, 1[$	$B = [1/4, 1/2] \cup [2/3, 3/4]$	☐	☐	☐	☐
$A =]0, 1]$	$B =]1/4, 1/2[\cup]2/3, 1]$	☐	☐	☐	☐

Question 5 *(Barème indicatif: 1+1+2 points)* Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

(a) Montrer que l'application $N_1(P) = \int_0^1 |P(x)|\, dx$, est une norme sur E.

(b) Montrer que l'application $N_2(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, est une autre norme sur E.

(c) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] :\ a_n = 1\}$. Montrer que $\inf_{P \in A} \int_0^1 |P(x)|\, dx > 0$

Question 6 *(Barème indicatif: 1+1.5+1+1 points)* Soit $f(x) = \sqrt{x + \sin^2(x)}$, $x > 0$.

(a) Laquelle des fonctions suivantes est la dérivé de f?

- ☐ $\frac{1}{2}\sqrt{x + \sin^2(x)}(1 + 2\cos(x))$
- ☐ $\frac{1+\sin(2x)}{2\sqrt{x+\sin^2(x)}}$
- ☐ $\frac{1+\sin(2x)}{2\sqrt{x+\cos^2(x)}}$
- ☐ $\frac{1+\cos(2x)}{2\sqrt{x+\sin^2(x)}}$

(b) Montrer que f est une contraction stricte sur $[1, \infty)$.

(c) Justifier rigoureusement qu'il existe un point unique $x_* \in [1, \infty)$ tel que $x_* = f(x_*)$.

(d) Un calcul numérique (arrondi à 4 décimales) sur les itérations successives pour les valeurs initiales $x_0 = 1.5$ et $y_0 = 2$ montre

$$\begin{aligned}(x_n) &= (1.5,\ 1.5796,\ 1.6061,\ 1.6139,\ 1.6162,\ 1.6168,\ 1.6170,\ \ldots)\\ (y_n) &= (2,\ 1.6813,\ 1.6338,\ 1.6217,\ 1.6184,\ 1.6174,\ 1.6172,\ \ldots).\end{aligned}$$

Démontrer rigoureusement que $x_* \in [1.6169,\ 1.6172]$. On pourra considérer la suite $a_n = |x_n - x^*|$ et $b_n = |y_n - x^*|$.

Question bonus: *(Barème indicatif: 2 points)* Soit $X = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie dite "des boites" engendré par $\mathcal{B} = \left\{\mathcal{O} = \prod_{n=0}^{\infty} O_n : \quad \forall n : \quad O_n \subset [-1, 1] \text{ ouvert}\right\}$. Soit $f(x) = (x, x, x, \ldots)$. En considérant $\mathcal{O} = \prod_n \left]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right[$, montrer que l'application $f : [-1, 1] \to X$ n'est pas continue (alors que ceci est trivialement vrai coordonnée par coordonnée). Que se passe t il?

— FIN —