ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
DEUXIÈME SESSION

Licence 3, Topologie (transitoire)
Durée : 3h00
Documents : non autorisés
Aucun matériel électronique est autorisé.
Le barème indicatif sera ramené sur 200 points par une application linéaire après correction.

Collège Sciences et technologies

Version B

Pour les questions à choix multiples (marqués QCM), il *zéro, une ou plusieurs* réponses sont correctes. Pour des question vrai/faux évidemment une seule est correcte. Toute proposition justement cochée donnera $+1$ point, toute proposition non cochée donnera zéro points et toute proposition cochée par erreur donnera -1 points. La somme des points par question à choix multiples ne pouvant être négative, elle sera compté comme nulle si le nombre d'erreurs dépasse le nombre de réponses correctes. **Il est donc vivement déconseillé de cocher "au hasard" sans être sûr de la réponse.** Le nombre de points obtenus est ensuite pondéré avec le barème indiqué.

Numéro d'anonymat ☐

Question 1 *(Barème indicatif: 0.5 points par question. Type QCM)* Répondre vrai / faux dans les questions suivantes:

(a) Tout espace métrique peut être vu comme espace topologique.
☐ vrai ☐ faux

(b) Réciproquement, toute topologie sur X provient d'une distance convenable sur X
☐ vrai ☐ faux

(c) Sur un ensemble non-vide arbitraire on peut toujours définir une topologie.
☐ vrai ☐ faux

(d) L'union de deux topologies sur X en est une autre.
☐ vrai ☐ faux

(e) L'intersection de deux topologies sur X en est une autre.
☐ vrai ☐ faux

(f) Sur $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}\big\}$ est une topologie.
☐ vrai ☐ faux

(g) Sur $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\big\}$ est une topologie.
☐ vrai ☐ faux

(h) $\mathbb{R}$ est quasi-compact pour la topologie usuelle.
☐ vrai ☐ faux

(i) $\mathbb{R}$ est quasi-compact pour la topologie discrète (induit par le distance discrète).
☐ vrai ☐ faux

(j) $\mathbb{R}$ est quasi-compact pour la topologie co-finie (ouverts sont l'ensemble vide et le complémentaire de toute partie finie).
☐ vrai ☐ faux

(k) Les rationnels $\mathbb{Q}$, muni de la distance habituelle, forme un espace métrique complet.
☐ vrai ☐ faux

(l) Les rationnels $\mathbb{Q}$, muni de la distance discrète (rappel $d(x, y) = 1$ ssi $x \neq y$) forme un espace métrique complet.
☐ vrai ☐ faux

(m) On peut associer à tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ un autre espace topologique, appelé l'espace complément, par $(X, \mathcal{S})$ où $\mathcal{S} = \{\mathcal{O}^{\complement} : \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$.
☐ vrai ☐ faux

Question 2 *(Barème indicatif: 4 points, type QCM)* On munit $A \subset \mathbb{R}$ de la topologie induite par la topologie habituelle de $\mathbb{R}$. Pour chaque couple (A, B) ci-dessous, déterminer si B est ouvert, fermé ou compact, ou si B n'a aucune de ces propriétés.

		ouvert	fermé	compact	aucune
$A = [0, 4]$	$B = [1, 2] \cup [3, 4[$	☐	☐	☐	☐
$A = [0, 4]$	$B =]2, 4]$	☐	☐	☐	☐
$A =]0, 4]$	$B =]1, 2[\cup]3, 4]$	☐	☐	☐	☐
$A =]0, 4[$	$B = [2, 4[$	☐	☐	☐	☐

Question 3 *(Barème indicatif: 2 points, réponse libre)* Montrer que le matrices réelles $n \times n$ inversibles forment une partie non-connexe de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Indication: on pourra d'abord justifier (en une à deux phrases!) que le déterminant $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ est une application continue.

Question 4 *(Barème indicatif: 3 points, réponse libre)* Soit X un espace vectoriel normé complet. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty$ implique que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge dans X. Indication: montrer que $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ est une suite de Cauchy.

Question 5 *(Barème indicatif: 5 points)* Cette question concerne la réciproque de la question précédente (mais elle est indépendante de celle-ci). Soit X un espace vectoriel normé, et (x_n) une suite dans X. Considérer les arguments suivantes.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang N_ε à partir duquel $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon/2$.

(b) Il en suit que $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}$ et ainsi que $\sum_{n\geq 0} \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| < \infty$.

(c) Par un argument de télescopage (et l'hypothèse), la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge alors dans X. Appelons ℓ sa limite.

(d) Par hypothèse il existe pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un $\varphi(n)$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et tel que pour tout $p, q \geq \varphi(n)$ on a $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-n}$.

(e) Soit M_1 tel que pour $n \geq M_1$, $\varphi(n) \geq N_\varepsilon$ et soit M_2 tel que pour $n \geq M_2$, $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon/2$.

Mettre les arguments (a) - (e) précédents dans le bon ordre pour donner une preuve du résultat suivant: LEMME. *Soit X un espace vectoriel normé, et supposons pour toute suite (x_n) que $\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty$ implique que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge dans X. Alors X est un espace complet.*

Preuve: Soit (x_n) une suite de Cauchy. ☐. ☐. ☐. ☐. ☐. Ainsi, pour $n \geq \max(M_1, M_2)$, on a par inégalité triangulaire que $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (x_n) converge. □

Question 6 *(Barème indicatif: 0.5 + 2 + 0.5 + 2 points)* Rappelez vous que les questions sont essentiellement indépendantes les unes des autres.

(a) Montrer que $f(x) = \frac{x}{1+x}$ est strictement croissante sur $[0, \infty)$.

(b) Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $\delta(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une autre distance sur X. (indication utiliser (a) pour montrer l'inégalité triangulaire)

(c) Montrer que $d(x, y) < r$ si et seulement si $\delta(x, y) < \frac{r}{1+r}$

(d) En déduire que les topologies enduites par d et δ sur X sont identiques.

Question 7 *(Barème indicatif: 2 + 2 + 2 points).* Soit (X, δ) un espace métrique compact, où δ est une distance satisfaisant $\delta(x, y) \leq 1$ pour tout $x, y \in X$.

(a) Montrer que X contient une suite (d_n) telle que $D = \{d_n : \ n \geq 0\}$ est dense dans X. Indication: pour tout $n \geq 1$ fixé, considérer un recouvrement de X par toutes(!) les boules de rayon $1/n$.

(b) Soit (d_n) une suite dense dans X (par exemple celle construite dans la question précédente). On munit $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ de le topologie produit. Considérer l'application $f : X \to [0, 1]^{\mathbb{N}}$ défini par $f(x) = (\delta(x, d_n))_{n \geq 0}$.

(i) Montrer que f est continue.

(ii) Montrer que f est injective.

(c) Montrer que $f : X \to f(X)$ est un bijection continue entre espaces compacts. En déduire que $f^{-1} : f(X) \to X$ est continue.

— FIN —