Exercice 1 Soit (X, d) un espace métrique.

a) *Donner la définition d'une partie ouverte de X.*
O est ouvert si $\forall x \in O : \exists r > 0 : \quad B(x, r) \subseteq O$.

b) *Montrer que pour tout $x \in X$ et $r > 0$, $B(x, r)$ est un ouvert de X.*
Soit $y \in B(x, r)$, c'est à dire $d(x, y) < r$. Soit $a > 0$ tel que $d(x, y) + a < r$. Pour tout z tel que $d(z, y) < a$, on a $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) + a < r$, ce qui prouve $B(y, a) \subset B(x, r)$.

Exercice 2 *Soit $X = \mathbb{N}$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}$. Décrire les parties compactes de X.*
Observons que $\{n\} = \mathbb{N} \cap (n - 1/2, n + 1/2)$ à l'effet que $\{n\}$ est ouvert pour tout n. Ainsi, $A \subset \mathbb{N}$ quelconque est un ouvert car $A = \bigcup_{n \in A} \{n\}$. Autrement dit, la topologie induite est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit K un compact de $(X, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Or $K = \bigcup_{n \in K} \{n\}$ est un recouvrement d'ouverts, permettant un ss-recouvrement fini, K est fini. Ainsi tout compact est fini. Reciproquement, il est facile de voir des parties finies sont des compacts (peu importe la topologie!).

Exercice 3 *Soit X un espace topologique. Montrer que X est séparé (Hausdorff) si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.*
Soit X séparé et $(x, y) \notin \Delta$. Alors, par séparation, il existe des ouverts disjoints U, V tels que $x \in U$ et $y \in V$. On observe qu'alors $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$, car sinon $U \cap V \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout point (x, y) de $\Delta^{\complement}$, il existe un ouvert (notemment $U \times V$) inclus dans $\Delta^{\complement}$, ce qui prouve $\Delta^{\complement}$ ouvert, donc Δ fermé.
Soit Δ fermé et $x \neq y$. Donc $(x, y) \in \Delta^{\complement}$ qui est ouvert. Il existe un $O \in X \times X$ ouvert contenant (x, y), et par la definition de la topologie produit O convient un $U \times V$ contenant (x, y). Il est clair que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 4 **(lemme préparatif)** *Soit X un espace topologique (quasi-) compact et Y un espace topologique séparé (ou Hausdorff). Soit $f : X \to Y$ une bijection continue. Montrer que f^{-1} est continue.*
Soit $g = f^{-1}$. Il suffit de montrer que $g^{-1}(A)$ est fermé pour tout fermé de X. Mais $g^{-1}(A) = f(A)$. Or, si A est fermé dans un quasicompact X, il est quasicompact lui-même (ajoutons a un recouvrement de A par ouverts encore $A^{\complement}$, puis prenons un ss-recouvrement fini...). Donc, A fermé est quasicompact, et par continuité de f, $f(A)$ également. Or Y séparé, A est alors fermé.

Exercice 5 **(application)** *Soit $X = (0, 1)$ et $Y = X \cup \{\infty\}$ sa compactification Alexandroff. Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ muni de la topologie induite de $\mathbb{R}^2$ et*

$$f : \begin{cases} Y & \to & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \qquad \text{si } t \in (0, 1) \\ \infty & \mapsto & (1, 0) \end{cases}$$

a) *Montrer que f est bijectif.*
f est surjectif: le point $(1,0)$ a pour préimage ∞, les autres s'écritvent de la forme $(\cos(x),\sin(x))$ avec $x\in]0,2\pi[$, donc $t\in]0,1[$. Cette écriture étant unique, f est également injectif.

b) *Montrer que f est continue en tout point $t\in(0,1)$.*
La continuité de sin et cos donnent immédiatement que $\lim_{t_n\to t} f(t_n)=(\cos(2\pi t,\sin(2\pi t))$ pour tout $t\in]0,1[$.

c) *Pour montrer la continuité en ∞, soit V un voisinage de $(1,0)$.*

i) *Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que V contient l'arc*

$$\big\{(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t)),-\varepsilon<t<\varepsilon\big\}.$$

Un voisinage de $(1,0)$ contient un ouvert (relatif), donc un ensemble de la forme $\mathcal{O}\cap S^1$ avec $(1,0)\in\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. $\mathcal{O}$ contient une boule de rayon $r>0$ autour de $(1,0)$, et donc $\mathcal{O}\cap S^1$ un “arc”, comme demandé.

ii) *Montrer que $f^{-1}(V)$ contient $\mathcal{O}:=Y\backslash[\epsilon,1-\epsilon]$.*
Par la périodicité de cos et *sin*, $f^{-1}(V)$ contient $X\backslash[\epsilon,1-\epsilon]$. De plus, par $(1,0)\in V$, $\infty\in f^{-1}(V)$, donc $\mathcal{O}\subset f^{-1}(V)$.

iii) *Déduire que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de ∞ dans Y.* Observons que $\mathcal{O}=\{\infty\}\cup K^{\complement}$ où $K=[\epsilon,1-\epsilon]$ est un compact de X. Ainsi, $\mathcal{O}$ est ouvert dans Y.

d) *Montrer que f est continue.* On a vu que f est continue en tout point!

Par l'exercice précédent, f^{-1} est continue, c'est à dire Y et S^1 sont homéomorphes. On identifie Y avec S^1 grâce à f.