université de BORDEAUX

Année Universitaire 2017 / 2018
Devoir surveillé
Licence 3, Topologie
Durée : 1h20
Ni des documents, ni des équipement électroniques sont autorisés.

Collège Sciences et technologies

Pour les questions à choix multiples, il y a *zéro, une ou plusieurs* réponses correctes. Toute proposition justement cochée donnera $+1$ point, toute proposition non cochée donnera zéro point et toute proposition cochée par erreur donnera -1 point. La somme des points par question à choix multiples ne pouvant être négative, elle sera comptée comme nulle si le nombre d'erreurs dépasse le nombre de réponses correctes. **Il est donc vivement déconseillé de cocher "au hasard" sans être sûr de la réponse.** Le nombre de points obtenus est ensuite pondéré avec le barème indiqué.
Le devoir est composé de trois parties, qui seront corrigées par les trois chargés de TD. Il est donc impératif de vérifier d'avoir reçu les trois feuilles d'exercices (Parties A, B et C) et de renseigner le nom et numéro d'étudiant sur **chaque feuille**

Partie A

Nom ☐ **Numéro d'étudiant** ☐

Question 1 *(Barème indicatif : 4 points)* Compléter les phrases, en cochant

(a) Dans $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(x,y) = |x-y|$, l'ensemble $A = \{n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est

☐ ouvert ☒ non ouvert ☒ fermé ☐ non fermé

(b) Dans $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(x,y) = |x-y|$, l'ensemble $B = \{n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est

☒ ouvert ☐ non ouvert ☒ fermé ☐ non fermé

(c) Dans $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(x,y) = |x-y|$, l'ensemble $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est

☐ ouvert ☒ non ouvert ☐ fermé ☒ non fermé

(d) Dans $X = (0,1]$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(x,y) = |e^{2\pi ix} - e^{2\pi iy}|$, l'ensemble $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est

☐ ouvert ☒ non ouvert ☒ fermé ☐ non fermé

(e) Dans $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$, l'ensemble $E = \{(x,y) : x > 0, y > 1/x^2\}$ est

☒ ouvert ☐ non ouvert ☐ fermé ☒ non fermé

(f) Dans $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$, l'ensemble $F = \{(x,y) : x > 0, y \geq 1/x^2\}$ est

☐ ouvert ☒ non ouvert ☒ fermé ☐ non fermé

Question 2 *(Barème indicatif : 4 points) Soit (X,d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans X. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ admet au plus un point d'accumulation, c'est-à-dire : si pour deux extratrices φ, σ, $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ converge vers ℓ et $(x_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ converge vers $\widetilde{\ell}$, alors $\ell = \widetilde{\ell}$.*

Soit $\ell, \widetilde{\ell}$ deux points d'accumulations de (x_n). Si $\ell \neq \widetilde{\ell}$, soit $\varepsilon = d(\ell, \widetilde{\ell})$. Puisque (x_n) est Cauchy, il existe $N > 0$ tel que $n, m \geq N$ implique $d(x_n, x_m) < \varepsilon/3$. Or $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ converge vers ℓ il existe un L tel que $d(\ell, x_{\varphi(n)}) < \varepsilon/3$ pour $n \geq L$. De même, il existe un M tel que $d(\ell, x_{\sigma(n)}) < \varepsilon/3$ pour $n \geq M$. Mais alors pour $n > \max(L,M)$ suffisement grand, $\varphi(n) > N$ et $\sigma(n) > N$ et donc

$$\varepsilon = d(\ell, \widetilde{\ell}) \leq d(\ell, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x_{\sigma(n)}) + d(\widetilde{\ell}, x_{\sigma(n)}) < \varepsilon,$$

ce qui est contradictoire.

Question 3 *(Barème indicatif : 5 points)* Compléter les phrases, en cochant

(a) $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(x,y) = |x-y|$, l'ensemble $A = \{n : |n| \leq 2017\}$ est

☒ compact ☐ non compact

(b) $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = |x_1 - y_1| + 42|x_2 - y_2|$, l'ensemble $B = \{(x,y) \in X : |x| \leq \pi, |y| \leq \cos(x)\}$ est

☒ compact ☐ non compact

(c) $X = C([0,1])$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(f,g) = \|f - g\|_\infty$, la boule fermé $B[0,1]$ est

☐ compacte ☒ non compacte

(d) $X = (0,1]$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(x,y) = |e^{2\pi i x} - e^{2\pi i y}|$, l'ensemble $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est

☒ compact ☐ non compact

(e) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}$ engendrée par $d(x,y) = \|x - y\|_\infty$, l'ensemble $E = \{(x_1,\ldots,x_n) \in X : x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0\}$ est

☐ compact ☒ non compact

Question 4 *(Barème indicatif : 3 points)* Voici une preuve d'un lemme:
Démonstration. On applique l'hypothèse à la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ que l'on considère une sous-suite d'elle-même via l'extractrice 'identité'. Ainsi, il existe une extractrice ψ tel que $(x_\psi(n))_{n\geq 1}$ converge vers une limite, appelons la $\ell \in X$. Supposons par l'absurde que $(x_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers ℓ. Il existent donc une extractrice φ et un $\varepsilon > 0$ tels que $d(x_{\varphi(n)}, \ell) \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, toute sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite convergente : appliqué à $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ on déduit qu'il existe une nouvelle extractrice σ telle que $(x_{\varphi(\sigma(n))})_{n\geq 1}$ converge vers une limite, appelons la $\widetilde{\ell} \in X$. Puisque $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, elle a au plus un point d'accumulation (voir Question 2), ce qui montre $\widetilde{\ell} = \ell$. On obtient une contradiction puisque $(x_{\varphi(\sigma(n))})_{n\geq 1}$ converge vers ℓ tout en ayant des distances supérieures à ε à ℓ.

Formuler l'énoncé du Lemme démontré ci-dessus : prenez soin d'une rédaction particulièrement claire (quelles sont les hypothèses? quelles sont les conclusions?)

Soit (x_n) une suite de Cauchy ayant la propriété que toute sous-suite admette une sous-sous-suite qui converge. Alors (x_n) converge.

Question 5 *(Barème indicatif : 1+1+2 points) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.*

(a) *Montrer que l'application $N_1(P) = \int_0^1 |P(x)|\,dx$, est une norme sur E.*

(b) *Montrer que l'application $N_2(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, est une autre norme sur E.*

(c) *Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : a_n = 1\}$. Montrer $B_{N_2}[0,1] \subset A^\complement$, et justifier $\inf_{P\in A} \int_0^1 |P(x)|\,dx > 0$.*

(a) N_1 est la norme $L_1(0,1)$ restreint à E, c'est bien une norme (simple à montrer, question de cours). (b) N_2 est évidemment aussi une norme (c'est la norme ℓ_1 sur les coefficients $\sim \mathbb{R}^{n+1}$). (c) Venons à question principale: les deux normes N_1 et N_2 sont equivalentes car E est de dimension finie, c'est à dire

$$cN_1(P) \leq N_2(P) \leq CN_1(P).$$

Mais $N_2(P) \geq 1$ pour $P \in A$ donc $N_1(P) \geq \frac{1}{C}$ pour $P \in A$.