

Pour les questions à choix multiples, il y a *zéro, une ou plusieurs* réponses correctes. Toute proposition justement cochée donnera +1 point, toute proposition non cochée donnera zéro point et toute proposition cochée par erreur donnera -1 point. La somme des points par question à choix multiples ne pouvant être négative, elle sera comptée comme nulle si le nombre d'erreurs dépasse le nombre de réponses correctes. **Il est donc vivement déconseillé de cocher "au hasard" sans être sûr de la réponse.** Le nombre de points obtenus est ensuite pondéré avec le barème indiqué.

Le devoir est composé de trois parties, qui seront corrigées par les trois chargés de TD. Il est donc impératif de vérifier d'avoir reçu les trois feuilles d'exercices (Parties A, B et C) et de renseigner le nom et numéro d'étudiant sur **chaque feuille**

Partie A

Nom Numéro d'étudiant

Question 1 (Barème indicatif: 4 points) Compléter les phrases, en cochant

- (a) Dans $X = \mathbb{R}$, \mathcal{T} engendrée par $d(x, y) = |x - y|$, l'ensemble $A = \{n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est
 ouvert non ouvert fermé non fermé
- (b) Dans $X = \mathbb{Z}$, \mathcal{T} engendrée par $d(x, y) = |x - y|$, l'ensemble $B = \{n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est
 ouvert non ouvert fermé non fermé
- (c) Dans $X = \mathbb{R}$, \mathcal{T} engendrée par $d(x, y) = |x - y|$, l'ensemble $C = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est
 ouvert non ouvert fermé non fermé
- (d) Dans $X = (0, 1]$, \mathcal{T} engendrée par $d(x, y) = |e^{2\pi i x} - e^{2\pi i y}|$, l'ensemble $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est
 ouvert non ouvert fermé non fermé
- (e) Dans $X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{T} engendrée par $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, l'ensemble $E = \{(x, y) : x > 0, y > 1/x^2\}$ est
 ouvert non ouvert fermé non fermé
- (f) Dans $X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{T} engendrée par $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$, l'ensemble $F = \{(x, y) : x > 0, y \geq 1/x^2\}$ est
 ouvert non ouvert fermé non fermé

Question 2 (Barème indicatif: 4 points) Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans X . Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ admet au plus un point d'accumulation, c'est-à-dire : si pour deux extraitrices φ, σ , $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ converge vers ℓ et $(x_{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ converge vers $\tilde{\ell}$, alors $\ell = \tilde{\ell}$.

Le devoir est composé de trois parties (A, B, C). Vérifier d'avoir reçu les trois feuilles d'exercices et renseigner votre nom et numéro d'étudiant sur **chaque feuille**

Nom

Numéro d'étudiant

Question 3 (Barème indicatif: 5 points) Compléter les phrases, en cochant

(a) $X = \mathbb{Z}$, \mathcal{T} engendrée par $d(x, y) = |x - y|$, l'ensemble $A = \{n : |n| \leq 2017\}$ est

compact non compact

(b) $X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{T} engendrée par $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + 42|x_2 - y_2|$, l'ensemble $B = \{(x, y) \in X : |x| \leq \pi, |y| \leq \cos(x)\}$ est

compact non compact

(c) $X = C([0, 1])$, \mathcal{T} engendrée par $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$, la boule fermé $B[0, 1]$ est

compacte non compacte

(d) $X = (0, 1]$, \mathcal{T} engendrée par $d(x, y) = |e^{2\pi i x} - e^{2\pi i y}|$, l'ensemble $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est

compact non compact

(e) $X = \mathbb{R}^n$, \mathcal{T} engendrée par $d(x, y) = \|x - y\|_\infty$, l'ensemble

$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in X : x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0\}$ est

compact non compact

Question 4 (Barème indicatif: 3 points) Voici une preuve d'un lemme:

Démonstration. On applique l'hypothèse à la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ que l'on considère une sous-suite d'elle-même via l'extractrice 'identité'. Ainsi, il existe une extractrice ψ tel que $(x_{\psi(n)})_{n \geq 1}$ converge vers une limite, appelons la $\ell \in X$. Supposons par l'absurde que $(x_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers ℓ . Il existent donc une extractrice φ et un $\varepsilon > 0$ tels que $d(x_{\varphi(n)}, \ell) \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, toute sous-suite de $(x_n)_{n \geq 1}$ admet une sous-suite convergente: appliqué à $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ on déduit qu'il existe une nouvelle extractrice σ telle que $(x_{\varphi(\sigma(n))})_{n \geq 1}$ converge vers une limite, appelons la $\tilde{\ell} \in X$. Puisque $(x_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, elle a au plus un point d'accumulation (voir Question 2), ce qui montre $\tilde{\ell} = \ell$. On obtient une contradiction puisque $(x_{\varphi(\sigma(n))})_{n \geq 1}$ converge vers ℓ tout en ayant des distances supérieures à ε à ℓ .

Formuler l'énoncé du Lemme démontré ci-dessus: prenez soin d'une rédaction particulièrement claire (quelles sont les hypothèses? quelles sont les conclusions?)

Le devoir est composé de trois parties (A, B, C). Vérifier d'avoir reçu les trois feuilles d'exercices et renseigner votre nom et numéro d'étudiant sur **chaque feuille**

Nom

Numéro d'étudiant

Question 5 (*Barème indicatif: 1+1+2 points*) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n .

(a) Montrer que l'application $N_1(P) = \int_0^1 |P(x)| dx$, est une norme sur E .

(b) Montrer que l'application $N_2\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n |a_i|$, est une autre norme sur E .

(c) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : a_n = 1\}$. Montrer $B_{N_2}[0, 1] \subset A^{\circ}$, et justifier $\inf_{P \in A} \int_0^1 |P(x)| dx > 0$.

Partie C