université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018
EXAMEN, DEUXIÈME SESSION

Licence 3, Topologie
Durée : 3h00
Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.

Collège Sciences et technologies

Pensez à bien justifier vos réponses.
Toute affirmation non justifiée sera considéré fausse.

Question 1 *(Barème indicatif: 1+1+1+1.5 = 4.5 points)* Soit $X = \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite par la norme Euclidienne $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Pour chacune des parties suivantes

(a) Faire un dessin de l'ensemble dans le plan $\mathbb{R}^2$.
(b) Expliquer avec preuve détaillée, si elles sont ouvertes ou non.

$$\begin{aligned}
A &= \Big\{(x,y): \quad x \in (0,\pi), |y| < |\sin(x)|\Big\}.\\
B &= \{(x,y): \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}\Big\}\\
C &= \{(x,\tfrac{1}{x}): \quad x \neq 0\Big\}\\
D &= \{(\tfrac{x}{1+x}\cos(x), \tfrac{x}{1+x}\sin(x)): \quad x \geq 0\Big\}
\end{aligned}$$

Question 2 *(Barème indicatif: 1+1=2 points)* Soit

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \qquad y^2 < x^2\right\}.$$

(a) Faire un dessin de E dans le plan $\mathbb{R}^2$.
(b) Justifier rigoureusement si, oui ou non, E est une partie connexe dans $\mathbb{R}^2$ (muni de la topologie habituelle).

Question 3 *(Barème indicatif: 0.5 + 1 + 1 + 0.5 + 1 = 4 points)* Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$F_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{N}^*$ montrer que $F_{a,b_1 \cdot b_2} \subset F_{a,b_1} \cap F_{a,b_2}$.
(b) Sur $\mathbb{Z}$ on introduit la topologie suivante: une partie $U \subset \mathbb{Z}$ est ouverte si elle est vide ou bien union quelconque d'ensembles de la forme $F_{a,b}$ (avec, comme avant, $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$). Démontrer que ceci définit une topologie sur $\mathbb{Z}$. On utilisera cette topologie pour le reste de l'exercice.
(c) Pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ identifier la partie suivante de $\mathbb{Z}$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{b-1} F_{a+i,b}\right)^{\complement}$$

puis décider si les parties $F_{a,b}$ sont des fermés de $\mathbb{Z}$.
(d) Identifier la partie suivante de $\mathbb{Z}$

$$\bigcup_{p \text{ premier}} F_{0,p}$$

(e) Avec un raisonnement topologique, en déduire par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Question 4 *(Barème indicatif: 1.5 points)* Sur $X = C([0,1])$ on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Montrer qu'il s'agit d'une norme sur X.

Question bonus (1 point)* Est-ce aussi une norme sur l'espace vectoriel des fonctions Riemann-intégrables sur $[0,1]$?

Question 5 *(Barème indicatif: 1+2= 3 points)*

(a) Soit X un espace vectoriel muni d'une norme $\| \cdot \|$. Montrer que $B[x,r] = \overline{B(x,r)}$ où, on le rappelle, $B[x,r] = \{y \in X : \|x-y\| \leq r\}$ et $B(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| < r\}$.

(b) Est-ce vrai dans un espace métrique quelconque? Preuve ou contre-exemple.

Question 6 *(Barème indicatif: 1 + 2 = 3 points)*
Soit (X,d) un espace métrique. Pour $A \subset X$ on pose

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

(a) Montrer que si $U \subset X$ est ouvert et (x_n) une suite convergeant vers $x \in U$, alors il existe un rang N tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$.

(b) On suppose en plus des précédentes hypothèses que X est compact et que $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est un recouvrement de X par des ouverts. Montrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $\mathrm{diam}(A) < \delta$ implique qu'il existe un $\lambda \in \Lambda$ avec $A \subset \mathcal{O}_\lambda$.
Indications: raisonner par l'absurde: s'il n'y a pas de tel $\delta > 0$, il existe une suite (A_n) de parties de X telle que, pour tout n, $\mathrm{diam}(A_n) < \frac{1}{n}$ mais A_n ne soit contenu dans aucun $\mathcal{O}_\lambda$. Choisir un point quelconque $x_n \in A_n$ (pourquoi est-ce possible?), et considérer la suite (x_n) pour se ramener à la première question.

Question 7 *(Barème indicatif: 4 points)*
Soit X un espace topologique et Y un espace topologique compact (par recouvrement). Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X \times Y$ (muni de la topologie produit) contenant la partie $\{x_0\} \times Y$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ du point x_0 tel que $U \times Y \subset \mathcal{O}$. (Il est vivement recommandé de faire une esquisse de la situation !).

— FIN —