université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018 / 2019
DEVOIR SURVEILLÉ

Collège Sciences et technologies

Licence 3, Topologie
Durée : 1h30
Ni des documents, ni des équipement électroniques sont autorisés.

Question 1 Soit $X = \{a, b, c, .., z\}$ et

$$\mathcal{E} = \{\emptyset, \{t, o, p\}, \{o\}, \{l, o, g, i, e\}, X\} .$$

(a) Est-ce que $\mathcal{E}$ est une topologie sur X? Si non, déterminer la plus petite topologie $\mathcal{T}$ qui contient $\mathcal{E}$.
(b) Est-ce que X, muni de cette topologie, est un espace compact (bien justifier votre réponse).

Question 2 Soit $Y = \mathbb{R}$ et $Z = \mathbb{Z}$, les deux munis de la distance habituelle $d(x, y) = |x - y|$.
(a) Est-ce que les singletons sont fermés dans Y? Et dans Z? (bien justifier votre réponse).
(b) Est-ce que les singletons sont ouverts dans Y? Et dans Z? (bien justifier votre réponse).

Question 3
(a) Soit X un ensemble infini et $\mathcal{T} = \{O \subset X : \; O$ est vide ou bien $O^\complement$ est fini $\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie (appelé la topologie co-finie).
(b) Décrire le système $\mathcal{F}$ des parties fermées de cette topologie.
(c) Soit dorénavant $\mathbb{R}$ équipé de sa topologie habituelle. Montrer que toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est constante. (Indication: une application non-constante admet deux valeurs distincts dans $\mathbb{R}$ qui est un espace de Hausdorff, c'est à dire, séparé).
(d) Montrer que toute fonction injective $f : \mathbb{R} \to X$ est continue.

Question 4 Soit $d \geq 2$ et $X = \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, muni de la distance euclidienne.
(a) Montrer que X est connexe par arcs, en explicitant un arc qui relie deux points $x \neq y$ de X.
(b) Soit $Y = \{x \in X : \|x\|_2 = 1\}$ la sphère dans $\mathbb{R}^d$, munie de la topologie induite de $\mathbb{R}^d$. Expliciter une surjection continue $f : X \to Y$ (justifier surjectivité et continuité).
(c) Est-ce que Y est connexe?

Question 5 Voici la preuve d'un théorème. Compléter son l'énoncé suivant, en précisant clairement les hypothèses et les conclusions.

> **Théorème:** Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur un espace topologique X ...
>
> *démonstration: Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour chaque $x \in X$, il existe un rang $N(x)$ tel que $f_n(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pour tout $n \geq N(x)$. Par continuité, il existe un voisinage ouvert $V(x)$ de x tel que $f_{N(x)}(y) \in (-eps, \varepsilon)$ pour tout $y \in V(x)$. Les voisinages ouverts $V(x)$ recouvrent l'espace X. Par hypothèse sur celui-ci on peut extraire un sous-recouvrement fini, disons $X = V(x_1) \cup \ldots \cup V(x_M)$. Soit $N := \max(N(x_1), \ldots, N(x_M))$. Pour tout $x \in X$ il existe un $i \in \{1, \ldots, M\}$ tel que $x \in V(x_i)$. Par monotonie, on a pour tout $n \geq N \geq N(x_i)$ que $0 \leq f_n(x) \leq f_{N(x_i)}(x) < \varepsilon$. Ainsi, $\|f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$.* $\square$

— FIN —