**Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.**

**Veuillez vous efforcer à répondre uniquement dans les cadres prévus.**

**Question de cours.** *(Barème indicatif: 0.5 points par question. )*

(a) *Soient $X, Y$ des espaces topologiques. Donner la définition d'une application continue $f : X \to Y$*
L'image reciproque de tout ouvert est ouvert.

(b) *Soient $X, Y$ des espaces métriques, avec les topologies naturelles induites. Donner une caractérisation équivalente de la continuité de $f : X \to Y$ (différente à la réponse précédente)*
Pour toute suite $(x_n)$ qui converge vers $x$, la suite image $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$.

(c) *Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstraß.*
Un espace métrique $X$ est compact ssi $X$ est sequentiellement compact.

(d) *Enoncer une version du théorème de Baire.*
Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $(O_n)$ une suite dénombrable d'ouverts denses de $E$. Alors $\bigcap O_n$ est dense dans $E$.

(e) *Énoncer le théorème du point fixe (de Banach).*
Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \to E$ une contraction stricte, i.e. une application Lipschitzienne avec $L < 1$. Alors il existe un unique $x_0$ avec $f(x_0) = x_0$.

(f) *Donner un exemple d'un espace vectoriel normé et d'une suite $(x_n) \subset X$ bornée qui n'admet pas de sous-suite convergente.*
L'espace doit être de dimension infinie. Un exemple serait $\ell_2$ avec $x_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Il est facile de voir $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}$ $(n \neq m)$. Une sous-suite n'est donc jamais Cauchy, encore moins convergeant.

**Question 1** *(QCM. Bonne réponse = $+1/2$ points, fausse réponse = $-1/2$), pas de réponse = $+0$)*

(a) L'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte.
Faux. *Exemple: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 0$ satisfait $f^{-1}([0, 1]) = \mathbb{R}$ qui n'est pas compact.*

(b) Toute partie connexe d'un espace séparé est compacte.
Absurdement faux. *Ex: $A = \mathbb{R}$ dans $X = \mathbb{R}$ est connexe, mais $A$ n'est pas compacte.*

(c) Si $U$ est une partie ouverte et fermée d'un espace topologique $X$ alors $U = \emptyset$ ou $U = X$.
Faux *(Mais est vrai que dans des epaces connexes.) Ex: $X = (-2, -1) \cup (1, 2)$ avec la topologie induite, $U = (-2, -1)$ est ouvert et fermé car $U^{\complement} = (1, 2)$ est ouvert.*

(d) Dans un espace métrique les singletons sont fermés.
Vrai.*preuve: $\{x\} = \bigcap \overline{B}(x, 1/n)$.*

(e) Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.
Vrai. *preuve: Soit $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recouvrement de $F$ (fermé) par des ouverts et $\lambda_* \notin \Lambda$. On pose $O_{\lambda_*} := F^{\complement}$ et $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\lambda_*\}$. Ainsi, $(O_\lambda)_{\lambda\in\widetilde{\Lambda}}$ est un recouvrement de $K$, qui est compact. Il en existe un sous-recouvrement fini, qui servira (en omettant $O_{\lambda_*}$) de recouvrement de $F$.*

(f) Si l'adhérence de $A$ est connexe alors $A$ est connexe.
Faux. *exemple: $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$, son adhérence trivialement si.*

**Question 2** *(Barème indicatif: 3 points)* . Soit $X = \mathbb{R}$ et

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : \quad a \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Prouver que $\mathcal{T}$ est une topologie de $X$ (justifier soigneusement toutes les étapes).
*Le vide et $\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{T}$. L'intersection de deux ouverts non-triviaux est de la forme $(max(a, b), +\infty)$ donc dans $\mathcal{T}$. Une union d'ouverts non-triviaux est de la forme $(\inf a_\lambda, +\infty)$ où $O_\lambda = (a_\lambda, +\infty)$, Cet infimum est $-\infty$ ou un réel, dans tous les cas, l'union apparient à $\mathcal{T}$.*

(b) Est-ce que $[0, 1]$ est compact? Preuve ou contre-exemple.
*Un recouvrement de $[0, 1]$ par des ouverts doit contenir un ouvert $O$ qui lui, contien $0$. Alors $O = \mathbb{R}$ ou bien $O = (a, \infty)$ avec $a < 0$.* **un seul** *ouvert suffit alors pour recouvrir $[0, 1]$!*

(c) Est-ce que $X$ est connexe? Preuve ou contre-exemple.
*Deux ouverts non-vides ont toujours une intersection non-vide. Ainsi, $X$ est connexe.*

(d) Est-ce que $X$ est Hausdorff (séparé)? Preuve ou contre-exemple.
*par la même rason, $X$ n'est pas de Hausdorff!*

(e) Existe il une distance qui engendre $\mathcal{T}$? Preuve ou contre-exemple.
*non. Un espace métrique est toujours séparé!*

**Question 3** *(Barème indicatif: 2 points)* Soit $X, Y$ deux espaces topologiques, et $X \times Y$ muni de la topologie produit.

(a) Montrer que la projection $\pi_X : X \times Y \to X,\ \pi_X((x, y)) = x$ est continu (ce sera pareil pour $\pi_Y$, évidemment).
*Si $O \subset X$ est ouvert, $\pi_X^{-1}(O) = O \times Y$ est trivialement ouvert dans $X \times Y$ (c'est un élément de la sous-base de la topologie produit).*

(b) Soit $Z$ un autre espace topologique et $f : Z \to X \times Y$. Montrer que $f$ est continu si, et seulement si $\pi_X \circ f$ et $\pi_Y \circ f$ sont continus:
Montrer l'implication "$\Rightarrow$"
*La composition de deux applications continues est continue.*

(c) Montrer l'implication "$\Leftarrow$"
*Il suffit de considerer des ouverts de $X \times Y$ de la forme $O = U \times V$ (car c'est une (sous)base de la topologie). On observe que*

$$f^{-1}(U \times V) = (\pi_X \circ f)^{-1}(U) \cap (\pi_Y \circ f)^{-1}(V)$$

par hypothèse, les deux parties intersectés sont ouvertes. $\square$.

**Question 4** *(QCM. Bonne réponse = $+1$ points, fausse réponse = $-1$, pas de réponse = $+0$)*
Dans cet exercice $\mathbb{R}$ est équipé de la tologie habituelle.

(a) Soit $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(2) = 6$ et $f(4) = 3$. Parmi les réponses suivantes, quelle est la plus forte implication* pour $A = f([2, 4])$ (une seule réponse):

- ☐ $A$ est borné.
- ☐ $A$ est un intervalle fermé.
- ☐ $A = [2, 4]$.
- ☐ $A = [3, 6]$.
- ☐ $A$ contient $[3, 6]$.
- ☐ $A \subseteq \mathbb{R}$ contient les points $3, 6$.
- ☒ $A$ est un intervalle fermé et borné qui contient $[3, 6]$.

*$[2, 4]$ est compact, et $f$ continue. Donc $A$ est compact. Dans $\mathbb{R}$ avec sa topo. habituelle ceci est equivalent à dire que $A$ est borné et fermé. Par le théorème des valeurs intermédiaires, $[3, 6] \subset A$. La dernière réponse est donc la bonne.*

(b) Soit $g : (1, 5) \to \mathbb{R}$ une fonction *uniformément* continue avec $g(2) = 6$ et $g(4) = 3$. Parmi les réponses suivantes, quelle est la plus forte implication pour $B = g((1, 5))$ parmi les réponses suivantes (une seule réponse):

- ☐ $B$ est un intervalle qui contient $[3, 6]$.
- ☐ $B$ est un ensemble qui contient $[3, 6]$.
- ☐ $B = [3, 6]$.
- ☐ $B$ est un intervalle ouvert qui contient $[3, 6]$.
- ☐ $B$ est un ensemble borné qui contient $[3, 6]$.
- ☐ $B$ contient 3 et 6.
- ☒ $B$ est un intervalle borné qui contient $[3, 6]$.

*D'abord, par le TVI, $B$ est un intervalle et contient $[3, 6]$. Par contiuité uniforme, pour $\epsilon = 1$ (par exemple) il existe un $\delta > 0$ tel que $|x - y| < \delta$ et $x, y \in (1, 5)$ implique que $|g(x) - g(y)| < 1$. Or, $[1, 5]$ se recouvre par un nombre fini (disons, $N$) d'intervalles de longueur $\delta/2 < \delta$, $|g(x) - g(2)| < N$ pour tout $x \in (1, 5)$, $B$ est ainsi borné. Il n'y a aucune raison que l'image continue d'un ouvert soit ouvert (par exemple, $\sin(42x)$ envoie $(1, 5)$ sur $[-1, 1]$ !) La dernière réponse est donc la bonne.*

---

*c'est à dire: trouver l'unique réponse correcte qui implique toutes les autres réponses correctes

**Question 5** *(Barème indicatif: $2.5$ points)* Soit $X = C([a,b])$ muni de la norme $\|f\| = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$. Montrer que $X$ est un espace complet (indication: il y a trois étapes: existence d'une limite ponctuelle, convergence uniforme, limite appartient à $X$)

*Soit $(f_n)$ Cauchy dans $X$. Or $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$, la suite $(f_n(x))$ est Cauchy (donc convergente) pour tout $x$. Soit $f(x) = \lim f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, et $M$ tel que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq M$. Pour $n \geq M$ et tout $x \in [a,b]$ on a donc $|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty, m\geq M} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui prouve convergence uniforme de $(f_n)$ vers $f$.*

**Question 6** *(Barème indicatif: $4.5$ points)* Soit $(E,d)$ un espace métrique. Si $A$ est une partie non vide de $E$. Soit $d_A$ est la distance de $x$ à $A$, c'est à dire

$$d_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \inf\limits_{a\in A} d(a,x) \end{array} \right.$$

(a) Soit $A \subseteq B \subseteq E$. Etablir une inégalité entre $d_A(x)$ et $d_B(x)$ pour tout $x \in E$.
$d_B(x) = \inf\limits_{y\in B} d(y,x) \leq \inf\limits_{y\in A} d(y,x) = d_A(x)$

(b) Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$
$d_A(x) = 0$ *ssi* $\inf\limits_{a\in A} d(a,x) = 0$ *ssi* $\exists (a_n) \subset A : d(a_n,x) \to 0$. *ssi* $x \in \overline{A}$.

(c) Montrer que $x \mapsto d_A(x)$ est 1-Lipschitzienne (observer que $d_A(x) \leq d(x,a)$ pour tout $a \in A$, puis jouer avec l'inégalité triangulaire).
*$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y)$ donne $d_A(x) \leq d(x,a) \leq d(x,y) - d(a,y)$. Ceci est vrai pour tout $a \in A$. En passant au infimum, on a donc $d_A(x) \leq d(x,y) + d_A(y)$ ou bien $z := d_A(x) - d_A(y) \leq d(x,y)$. En renversant les rôles de $x, y$ on obtient $-z = d_A(y) - d_A(x) \leq d(y,x) = d(x,y)$. Puisque $z \leq d(x,y)$ et $-z \leq d(x,y)$ on a $|z| \leq d(x,y)$.* $\square$

(d) Soit $A, B \subset E$ deux parties fermées non vides, et telle que $A \cap B = \emptyset$. En utilisant

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d_A(x) - d_B(x) \end{array} \right.$$

montrer qu'il existe des ouverts $U$ et $V$ de $E$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
*$f$ ne peut s'anuler sur $A \cup B$ car sinon, $d_A(x) = d_B(x)$ pour un point appartenant à $A$ ou $B$. Par la questions (b) ce point serait dans $A \cap B$ — qui est vide. De l'autre coté, trivialement $f \geq 0$ sur $B$ et $f \leq 0$ sur $A$. La première observation montre que ces deux inégalités sont strictes! Il convient de poser $U = f^{-1}((-\infty, 0))$ et $V = f^{-1}((0, +\infty))$.*

(e) Soit $A \subset E$ fermé et $K \subset E$ compact tel que $A \cap K = \emptyset$. Montrer que $\inf\limits_{x\in K} d_A(x) > 0$.
*$d_A$ est Lipschitzienne est donc continue sur $K$. Ainsi elle admet son minimum, qui ne peut être nul par (b) et le fait que des compacts d'un espace métrique (Hausdorff!) sont fermés.*

(f) Existe t il un $\varepsilon > 0$ tel que $d_A^{-1}([0,\varepsilon)) \cap d_K^{-1}([0,\varepsilon)) = \emptyset$?
*Puisque la distance entre A et K est strictement positive, il suffit de prendre $\varepsilon$ plus petit que la moitié de la distance. Donc: OUI.*

**Question étoile** *(2 points Bonus)* On appelle une partie $K$ d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ clompact (néologisme pour "clos-compact") si tout recouvrement par des parties fermées admet un sous-recouvrement fini. Caracteriser les parties clompactes d'un espace topologique Hausdorff (ou séparé).

*Dans un Hausdorff, les singletons sont fermés. Une partie infinie ne peut donc pas être clompacte, car elle est unions de ses singletons. En revanche, toute partie finie est triviale clompacte. Ainsi, les clompacts sont exactement les parties finies de $X$.*

Rem: on voit que "clompact" n'est pas très intéressant comme notion, "compact" par contre si.

— FIN —