université de BORDEAUX

Année Universitaire 2018 / 2019
Licence 3

Examen Topologie
Durée : 3h00

Collège Sciences et technologies

Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.

Veuillez vous efforcer à répondre uniquement dans les cadres prévus.

Écrire lisiblement votre numéro d'anonymat (à défaut: no étudiant):

Question de cours. *(Barème indicatif: 0.5 points par question.)*

(a) Soient X, Y des espaces topologiques. Donner la définition d'une application continue $f : X \to Y$

(b) Soient X, Y des espaces métriques, avec les topologies naturelles induites. Donner une caractérisation équivalente de la continuité de $f : X \to Y$ (différente à la réponse précédente)

(c) Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

(d) Enoncer une version du théorème de Baire.

(e) Énoncer le théorème du point fixe (de Banach).

(f) Donner un exemple d'un espace vectoriel normé et d'une suite $(x_n) \subset X$ bornée qui n'admet pas de sous-suite convergente.

Question 1 *(QCM. Bonne réponse = +1/2 points, fausse réponse = −1/2), pas de réponse = +0)*

(a) L'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte.

Vrai ☐ Faux ☐

(b) Toute partie connexe d'un espace séparé est compacte.

Vrai ☐ Faux ☐

(c) Si U est une partie ouverte et fermée d'un espace topologique X alors $U = \emptyset$ ou $U = X$.

Vrai ☐ Faux ☐

(d) Dans un espace métrique les singletons sont fermés.

Vrai ☐ Faux ☐

(e) Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.

Vrai ☐ Faux ☐

(f) Si l'adhérence de A est connexe alors A est connexe.

Vrai ☐ Faux ☐

Question 2 *(Barème indicatif: 3 points)* . Soit $X = \mathbb{R}$ et

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : \quad a \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Prouver que $\mathcal{T}$ est une topologie de X (justifier soigneusement toutes les étapes).

(b) Est-ce que $[0, 1]$ est compact? Preuve ou contre-exemple.

(c) Est-ce que X est connexe? Preuve ou contre-exemple.

(d) Est-ce que X est Hausdorff (séparé)? Preuve ou contre-exemple.

(e) Existe il une distance qui engendre $\mathcal{T}$? Preuve ou contre-exemple.

Question 3 *(Barème indicatif: 2 points)* Soit X, Y deux espaces topologiques, et $X \times Y$ muni de la topologie produit.

(a) Montrer que la projection $\pi_X : X \times Y \to X,\ \pi_X((x, y)) = x$ est continu (ce sera pareil pour π_Y, évidemment).

(b) Soit Z un autre espace topologique et $f : Z \to X \times Y$. Montrer que f est continu si, et seulement si $\pi_X \circ f$ et $\pi_Y \circ f$ sont continus:
Montrer l'implication "$\Rightarrow$"

(c) Montrer l'implication "$\Leftarrow$"

Question 4 *(QCM. Bonne réponse $= +1$ points, fausse réponse $= -1$, pas de réponse $= +0$)*
Dans cet exercice $\mathbb{R}$ est équipé de la tologie habituelle.

(a) Soit $f : [2, 4] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(2) = 6$ et $f(4) = 3$. Parmi les réponses suivantes, quelle est la plus forte implication[†] pour $A = f([2, 4])$ (une seule réponse):

- ☐ A est borné.
- ☐ A est un intervalle fermé.
- ☐ $A = [2, 4]$.
- ☐ $A = [3, 6]$.
- ☐ A contient $[3, 6]$.
- ☐ $A \subseteq \mathbb{R}$ contient les points $3, 6$.
- ☐ A est un intervalle fermé et borné qui contient $[3, 6]$.

(b) Soit $g : (1, 5) \to \mathbb{R}$ une fonction *uniformément* continue avec $g(2) = 6$ et $g(4) = 3$. Parmi les réponses suivantes, quelle est la plus forte implication pour $B = g((1, 5))$ parmi les réponses suivantes (une seule réponse):

- ☐ B est un intervalle qui contient $[3, 6]$.
- ☐ B est un ensemble qui contient $[3, 6]$.
- ☐ $B = [3, 6]$.
- ☐ B est un intervalle ouvert qui contient $[3, 6]$.
- ☐ B est un ensemble borné qui contient $[3, 6]$.
- ☐ B contient 3 et 6.
- ☐ B est un intervalle borné qui contient $[3, 6]$.

[†] c'est à dire: trouver l'unique réponse correcte qui implique toutes les autres réponses correctes

Question 5 *(Barème indicatif: 2.5 points)* Soit $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|f\| = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$. Montrer que X est un espace complet (indication: il y a trois étapes: existence d'une limite ponctuelle, convergence uniforme, limite appartient à X)

Question 6 *(Barème indicatif: 4.5 points)* Soit (E, d) un espace métrique. Si A est une partie non vide de E. Soit d_A est la distance de x à A, c'est à dire

$$d_A : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \inf\limits_{a \in A} d(a, x) \end{cases}$$

(a) Soit $A \subseteq B \subseteq E$. Etablir une inégalité entre $d_A(x)$ et $d_B(x)$ pour tout $x \in E$.

(b) Montrer que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$

(c) Montrer que $x \mapsto d_A(x)$ est 1-Lipschitzienne (observer que $d_A(x) \leq d(x, a)$ pour tout $a \in A$, puis jouer avec l'inégalité triangulaire).

(d) Soit $A, B \subset E$ deux parties fermées non vides, et telle que $A \cap B = \emptyset$. En utilisant

$$f : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d_A(x) - d_B(x) \end{cases}$$

montrer qu'il existe des ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

(e) Soit $A \subset E$ fermé et $K \subset E$ compact tel que $A \cap K = \emptyset$. Montrer que $\inf_{x \in K} d_A(x) > 0$.

(f) Existe t il un $\varepsilon > 0$ tel que $d_A^{-1}([0, \varepsilon)) \cap d_K^{-1}([0, \varepsilon)) = \emptyset$?

Question étoile *(2 points Bonus)* On appelle une partie K d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ clompact (néologisme pour "clos-compact") si tout recouvrement par des parties fermées admet un sous-recouvrement fini. Caracteriser les parties clompactes d'un espace topologique Hausdorff (ou séparé).

— FIN —