université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2018 / 2019
LICENCE 3

Examen Topologie — session deux
Durée : 3h00

Collège Sciences et technologies

Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.
Veuillez vous efforcer à répondre uniquement dans les cadres prévus.

Écrire lisiblement votre numéro d'anonymat (à défaut: no étudiant):

Question de cours. *(Barème indicatif: 0.5 points par question.)*

(a) Soient X, Y des espaces topologiques. Donner la définition d'une application continue $f : X \to Y$

(b) Soient X, Y des espaces métriques, avec les topologies naturelles induites. Donner une caractérisation équivalente de la continuité de $f : X \to Y$ (différente à la réponse précédente)

(c) Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

(d) Enoncer une version du théorème de Baire.

Question 1 *(Barème indicatif: 2 pts)* Soit X un espace topologique. Montrer équivalence entre

(a) Toute application continue $\phi : X \to \{0, 1\}$ est constante (où $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète).

(b) X est connexe.

Question 2 *(Barème indicatif: 1 pts par question)* Donner preuve ou contre-exemple pour chacune des propositions suivantes.

(a) L'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte.

(b) Toute partie connexe d'un espace séparé est compacte.

(c) Si U est une partie ouverte et fermée d'un espace topologique X alors $U = \emptyset$ ou $U = X$.

(d) Dans un espace métrique les singletons sont fermés.

(e) Si l'adhérence de A est connexe alors A est connexe.

Question 3 *(Barème indicatif: 1+1+1= 3points)* Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dira qu'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers x si pour tout voisinage V de x il exise un $N \geq 1$ tel que V contient la suite $(x_{n+N})_{n\geq 1}$.

(a) Justifier que ceci est équivalent à la définition habituelle pour des suites réelles (et la topologie standard sur $\mathbb{R}$).

(b) (Un exemple curieux). Soit $X = \mathbb{N}$ muni de la topologie cofinie (i.e. O est ouvert si O est vide ou bien si $O^{\complement}$ est fini). Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = n$ converge vers tout $p \in \mathbb{N}$.

(c) (unicité) Montrer que lorsque $(X, \mathcal{T})$ est un espace Hausdorff (ou séparé), *la* limite d'une suite est toujours unique (si elle existe).

Question 4 *(Barème indicatif: 1+1+1/2+1+1= 4.5 points)* Soient (X, d) un espace métrique et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans X.

(a) Montrer que pour tout $x \in X$, la suite de réels $(d(a_n, x))_{n\geq 1}$ est convergente.

(b) On note $f(x) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, x)$; montrer que l'application $x \mapsto f(x)$ est 1-Lipschitzienne et donc continue de X dans $\mathbb{R}$.

(c) Calculer $\lim_{m\to\infty} f(a_m)$.

(d) À quelle condition sur la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est-ce que $\inf\{f(x) : x \in X\}$ est atteint ?

(e) Déduire de ce qui précède que si X n'est pas complet, il existe une application $\phi : X \to \mathbb{R}$ continue et non bornée.

Question 5 *(Barème indicatif: 1+2+1/2= 3.5 points)*

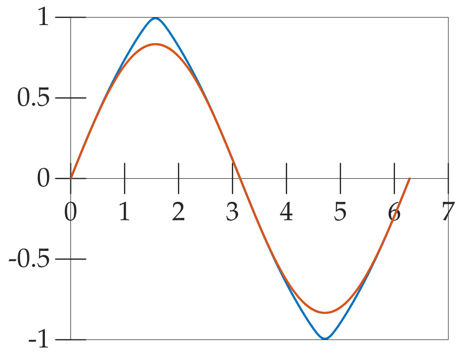
Soit $M = \{f \in C([0, 2\pi]) : \quad \forall_x : |f(x)| \leq 1\}$, $d(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$.

(a) Montrer que (M, d) est un espace métrique complet (on pourra utiliser des résultats de cours/TD sur l'espace $C([0, 1])$.)

(b) Montrer qu'il existe $f_* \in M$ tel que $f_* = \frac{1}{6}(5\sin(.) + f_*^5)$, en utilisant le théorème du point fixe de Banach. (justifier les étapes)

(c) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite des l'itérations successives à partir de $f_0 = 0$ et soit $N \geq 1$ fixé. Calculer une estimation de l'erreur d'approximation $\delta_N = \max_{x\in[0,2\pi]} |f_N(x) - f_*(x)|$ (Il n'est pas demandé de calculer autres itérations successives que f_1)

Illustation: la solution f_* et la première itération f_1.



— FIN —