

Objectifs: Savoir écrire des propositions logiques en utilisant des quantificateurs. Comprendre des formules mathématiques écrites avec des quantificateurs. Savoir trouver la négation d'une formule mathématique écrite avec des quantificateurs. dans

Definitions: Un énoncé mathématique $P(x)$ est une phrase utilisant des symboles mathématiques pour dire quelque chose concernant la variable x . Par exemple, on a

$$x > 3$$

et

$$x^2 \geq x.$$

Ces phrases deviennent des propositions quand la ou les valeur(s) de x est(sont) précisée. Par exemple, les énoncés

$$x = 4 \wedge x > 3$$

et

$$x > 3 \wedge x^2 \geq x$$

sont des propositions. (On peut toujours déterminer si une proposition est vraie ou fausse.) On peut écrire une proposition en utilisant des quantificateurs. Le quantificateur universel \forall_x signifie l'expression 'pour tout x .' Le quantificateur existentiel \exists_x signifie 'il existe un x (tel que)'. Ces quantificateurs font référence à un *univers de discours* comme les entiers, ou les nombres réels, ou les nombres plus grands que 5, ou les fonctions continues. Cet univers peut être précisé comme dans la phrase $\forall_{x \in \mathbb{R}} x + 1 \geq x$ mais, des fois on suppose que le lecteur peut deviner de quel univers on parle.

Exercice 1 Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \geq 0$;
2. $\exists_{x \in \mathbb{R}} x \geq 0$;
3. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 0$;
4. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 0$;
5. $\forall_{x \in \mathbb{R}} x \geq 0$;
6. $\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{Z}} xy \geq 0$;
7. $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{Z}} xy \geq 0$;
8. $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{Z}} xy \geq 0$.

Exercice 2 Trouver la négation de toutes les assertions de l'exercice 1.

Exercice 3 Écrire en langage mathématique les phrases suivantes. Déterminer si elles sont vraies ou fausses:

1. Il existe au moins un entier positif qui est pair.
2. Chaque nombre réel est inférieur à au moins un entier.
3. Quels que soient les nombres réels positifs x et y , il existe un entier positif n satisfaisant $nx > y$.
4. Quel que soit le nombre réel strictement positif x , il existe un entier positif n tel que $\frac{1}{n} < x$.
5. Quel que soit le nombre réel strictement positif x , il existe un entier positif n tel que $\frac{1}{n} < x^n$.

Exercice 4 L'expression $\exists!_{x \in A} P(x)$ se traduit en français par la phrase: il existe un unique élément x de A qui satisfait la condition $P(x)$. Ça peut s'écrire dans la forme

$$(\exists_{x \in A} P(x)) \wedge (\forall_{x_1, x_2 \in A} [P(x_1) \wedge P(x_2)] \implies x_1 = x_2).$$

1. Les propositions

$$\exists!_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 4$$

et

$$\exists!_{x \in \mathbb{R}} x + 3 = 5$$

sont-elles vraies ou fausses?

2. Trouvez les négations des propositions $\exists!_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 4$ et $\exists!_{x \in \mathbb{R}} x + 3 = 5$. Sont-elles vraies ou fausses?

Exercice 5 Donnez les valeurs de vérité des propositions suivantes. Justifiez vos réponses.

1. $\exists_{n \in \mathbb{N}} \frac{3n+5}{4n+4} < \frac{95}{124}$;
2. $\forall_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{2x^2+3} \leq \frac{3}{10}$;
3. $\forall_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{2x^2+1} \leq 1$;