Estimations de fonctions carrées, calcul fonctionnel et applications

Bernhard Haak

Bordeaux, le 28 Novembre 2012

Première partie: Fonctions carrées

Projection Littlewood et Paley

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subseteq \{\xi : \ |\xi| \in [1/2, 2]\} \qquad \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-k}\xi) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k = 1.$$

Projection Littlewood et Paley

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subseteq \{\xi : \ |\xi| \in [1/2, 2]\} \qquad \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-k}\xi) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k = 1.$$

Alors pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\qquad \widehat{P_k f}(\xi) := \widehat{\psi_k}(\xi)\,\widehat{f}\,(\xi)$

Projection Littlewood et Paley

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subseteq \{\xi : \ |\xi| \in [1/2, 2]\} \qquad \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-k}\xi) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k = 1.$$

Alors pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\qquad \widehat{P_k f}(\xi) := \widehat{\psi_k}(\xi)\,\widehat{f}\,(\xi)$

Fonction carrée de Littlewood et Paley

$$\left\|\widehat{f}\,(\xi)\right\|_{L^2}^2 = \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}\,(\xi)\right\|_{L^2}^2$$

Projection Littlewood et Paley

$$\operatorname{supp} \widehat{\psi} \subseteq \{\xi : \ |\xi| \in [1/2, 2]\} \qquad \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-k}\xi) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k = 1.$$

Alors pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\qquad \widehat{P_k f}(\xi) := \widehat{\psi_k}(\xi)\,\widehat{f}\,(\xi)$

Fonction carrée de Littlewood et Paley

$$\|\widehat{f}\,(\xi)\|_{L^2}^2 = \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}\,(\xi)\Big\|_{L^2}^2 = \int \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}\,(\xi)\Big|^2 d\xi$$

Projection Littlewood et Paley

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subseteq \{\xi : \ |\xi| \in [1/2, 2]\} \qquad \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-k}\xi) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k = 1.$$

Alors pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\qquad \widehat{P_k f}(\xi) := \widehat{\psi_k}(\xi)\,\widehat{f}(\xi)$

Fonction carrée de Littlewood et Paley

$$\|\widehat{f}(\xi)\|_{L^2}^2 = \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\Big\|_{L^2}^2 = \int \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\Big|^2 d\xi$$
$$\sim \int \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\big|^2 d\xi$$

Projection Littlewood et Paley

$$\operatorname{supp} \widehat{\psi} \subseteq \{\xi : \ |\xi| \in [1/2, 2]\} \qquad \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-k}\xi) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k = 1.$$

Alors pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\qquad \widehat{P_k f}(\xi) := \widehat{\psi_k}(\xi)\,\widehat{f}(\xi)$

Fonction carrée de Littlewood et Paley

$$\|\widehat{f}(\xi)\|_{L^2}^2 = \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\Big\|_{L^2}^2 = \int \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\Big|^2 d\xi$$
$$\sim \int \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$\|f\|_{L^2} \quad \sim \quad \Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k f|^2\Big)^{1/2} \Big\|_{L^2}$$

Projection Littlewood et Paley

$$\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subseteq \{\xi : \ |\xi| \in [1/2, 2]\} \qquad \widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-k}\xi) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k = 1.$$

Alors pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\qquad \widehat{P_k f}(\xi) := \widehat{\psi_k}(\xi)\,\widehat{f}(\xi)$

Fonction carrée de Littlewood et Paley

$$\|\widehat{f}(\xi)\|_{L^2}^2 = \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\Big\|_{L^2}^2 = \int \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\Big|^2 d\xi$$

$$\sim \int \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{\psi}_k(\xi)\widehat{f}(\xi)\big|^2 d\xi$$

Théorème (Littlewood, Paley):

$$\|f\|_{L^p} \quad \sim \quad \Big\| \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k f|^2\Big)^{1/2} \Big\|_{L^p}$$

Fonction carrée de Littlewood, Paley

$$Sf = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|P_k f\big|^2\Big)^{1/2} \qquad P_k f = \psi_k * f$$

Plus générale:

G groupe Abelien localement compact, μ mesure de Haar, $\varphi_t = \mathcal{F}^{-1}((\widehat{\varphi})(t\xi))$ telle que

$$\int_G (\varphi_t * f)\, d\mu(t) = f. \quad \text{Alors} \quad (Sf)(x) := \Big(\int_G \big|(\varphi_t * f)(x)\big|^2\, d\mu(t)\Big)^{1/2}$$

Exemples importants: $(\mathbb{R}, dt)$, $(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$, $(\mathbb{Z}, d\mu_d)$.

Fonction carrée de Littlewood, Paley

$$Sf = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k f|^2\Big)^{1/2} \qquad P_k f = \psi_k * f$$

Plus générale:

G groupe Abelien localement compact, μ mesure de Haar, $\varphi_t = \mathcal{F}^{-1}((\widehat{\varphi})(t\xi))$ telle que

$$\int_G (\varphi_t * f)\, d\mu(t) = f. \quad \text{Alors} \quad (Sf)(x) := \Big(\int_G \big|(\varphi_t * f)(x)\big|^2\, d\mu(t)\Big)^{1/2}$$

Exemples importants: $(\mathbb{R}, dt)$, $(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$, $(\mathbb{Z}, d\mu_d)$.

Situation importante: φ radiale

$$\begin{aligned}\varphi * f &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi}(\xi)\cdot \widehat{f}(\xi)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{m}(|\xi|^2)\cdot \widehat{f}(\xi)) \\ &= m(-\Delta)\, f\end{aligned}$$

Fonction carrée de Littlewood, Paley

$$Sf = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k f|^2\Big)^{1/2} \qquad P_k f = \psi_k * f$$

Plus générale:

G groupe Abelien localement compact, μ mesure de Haar, $\varphi_t = \mathcal{F}^{-1}((\widehat{\varphi})(t\xi))$ telle que

$$\int_G (\varphi_t * f)\, d\mu(t) = f. \quad \text{Alors} \quad (Sf)(x) := \Big(\int_G \big|(\varphi_t * f)(x)\big|^2 \, d\mu(t)\Big)^{1/2}$$

Exemples importants: $(\mathbb{R}, dt)$, $(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$, $(\mathbb{Z}, d\mu_d)$.

Situation importante: φ radiale

$$\begin{aligned} \varphi * f &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi}(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{m}(|\xi|^2) \cdot \widehat{f}(\xi)) \\ &= m(-\Delta)\, f \end{aligned}$$

φ radiale sur $\mathbb{R}^n$

$$Sf = \left(\int_0^\infty |\varphi_t * f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty |\psi(-t\Delta)f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions φ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty |\varphi(tA)f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

φ radiale sur $\mathbb{R}^n$

$$Sf = \left(\int_0^\infty |\varphi_t * f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty |\psi(-t\Delta)f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions φ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty |\varphi(tA)f|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

Un calcul classique

Soit (e_n) une b.o.n de L^2

$$\|f(t,x)\|_{L^p(L^2)} = \left\| \left(\sum_k |[f, e_k]_{L^2}|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

φ radiale sur $\mathbb{R}^n$

$$Sf = \left(\int_0^\infty \left|\varphi_t * f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \left|\psi(-t\Delta)f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions φ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty \left|\varphi(tA)f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

Un calcul classique

Soit (e_n) une b.o.n de L^2

$$\left\|f(t,x)\right\|_{L^p(L^2)} = \left\|\left(\sum_k \left|[f, e_k]_{L^2}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}$$

φ radiale sur $\mathbb{R}^n$

$$Sf = \Big(\int_0^\infty \big|\varphi_t * f\big|^2 \tfrac{dt}{t}\Big)^{1/2} = \Big(\int_0^\infty \big|\psi(-t\Delta)f\big|^2 \tfrac{dt}{t}\Big)^{1/2}$$

Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions φ est

$$s_\varphi(f) = \Big(\int_0^\infty \big|\varphi(tA)f\big|^2 \tfrac{dt}{t}\Big)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

Un calcul classique

Soit (e_n) une b.o.n de L^2 , (γ_n) suite de Gaussiennes indépendantes

$$\big\|f(t,x)\big\|_{L^p(L^2)} = \Big\|\Big(\sum_k \big|[f, e_k]_{L^2}\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p} = m_p^{-1}\Big\|\Big(\mathbb{E}\,\Big|\sum_k \gamma_k [f, e_k]_{L^2}\Big|^p\Big)^{1/p}\Big\|_{L^p}$$

φ radiale sur $\mathbb{R}^n$

$$Sf = \left(\int_0^\infty \left|\varphi_t * f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \left|\psi(-t\Delta) f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions φ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty \left|\varphi(tA) f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

Un calcul classique

Soit (e_n) une b.o.n de L^2 , (γ_n) suite de Gaussiennes indépendantes

$$\left\|f(t,x)\right\|_{L^p(L^2)} = \left\|\left(\sum_k \left|[f, e_k]_{L^2}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p} = m_p^{-1}\left\|\left(\mathbb{E}\left|\sum_k \gamma_k [f, e_k]_{L^2}\right|^p\right)^{1/p}\right\|_{L^p}$$

$$= m_p^{-1}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_k \gamma_k [f, e_k]_{L^2}\right\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$$

φ radiale sur $\mathbb{R}^n$

$$Sf = \left(\int_0^\infty \left|\varphi_t * f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \left|\psi(-t\Delta)f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$$

Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions φ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty \left|\varphi(tA)f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

Un calcul classique

Soit (e_n) une b.o.n de L^2 , (γ_n) suite de Gaussiennes indépendantes

$$\left\|f(t,x)\right\|_{L^p(L^2)} = \left\|\left(\sum_k \left|[f,e_k]_{L^2}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p} = m_p^{-1}\left\|\left(\mathbb{E}\left|\sum_k \gamma_k [f,e_k]_{L^2}\right|^p\right)^{1/p}\right\|_{L^p}$$

$$= m_p^{-1}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_k \gamma_k [f,e_k]_{L^2}\right\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$$

$$\text{(inégal. de Kahane)} \qquad \sim_p \left(\mathbb{E}\left\|\sum_k \gamma_k [f,e_k]_{L^2}\right\|_{L^p}^2\right)^{1/2}$$

(reprise) Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions ψ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty \left|\varphi(tA)f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

(reprise) Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions ψ est

$$s_\varphi(f) = \Big(\int_0^\infty \big|\varphi(tA)f\big|^2 \,\tfrac{dt}{t}\Big)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

fonctions carrées abstraites

$$\|s_\varphi(f)\|_{L^p} = \Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_k \gamma_k \int_0^\infty \varphi(tA)f\, e_k(t)\,\tfrac{dt}{t}\Big\|_{L^p}^2\Big)^{1/2}$$

(reprise) Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions ψ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty \left|\varphi(tA)f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

fonctions carrées abstraites

$$\|s_\varphi(f)\|_{L^p} = \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_k \gamma_k \underbrace{\int_0^\infty \varphi(tA)f\, e_k(t)\, \frac{dt}{t}}_{=T(e_k)}\Big\|_{L^p}^2\right)^{1/2}$$

(reprise) Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions ψ est

$$s_\varphi(f) = \left(\int_0^\infty \left|\varphi(tA)f\right|^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

fonctions carrées abstraites

$$\|s_\varphi(f)\|_{L^p} = \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_k \gamma_k \underbrace{\int_0^\infty \varphi(tA)f\, e_k(t)\,\frac{dt}{t}}_{=T(e_k)}\Big\|_{L^p}^2\right)^{1/2}$$

Définition: opérateurs γ–radonifiants

$$T : H \to X \quad \text{tel que} \quad \left(\mathbb{E}\Big\|\sum_k \gamma_k T e_k\Big\|_X^2\right)^{1/2} \quad \text{converge}$$

(reprise) Question naturelle

Sur quelles espaces X et pour quels opérateurs A et fonctions ψ est

$$s_\varphi(f) = \Big(\int_0^\infty \big|\varphi(tA)f\big|^2 \tfrac{dt}{t} \Big)^{1/2} \qquad \text{borné?}$$

fonctions carrées abstraites

$$\|s_\varphi(f)\|_{L^p} = \Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_k \gamma_k \underbrace{\int_0^\infty \varphi(tA)f\, e_k(t) \tfrac{dt}{t}}_{=T(e_k)} \Big\|_{L^p}^2 \Big)^{1/2}$$

Définition: opérateurs γ–radonifiants

$$T : H \to X \quad \text{tel que} \quad \Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_k \gamma_k T e_k \Big\|_X^2 \Big)^{1/2} \quad \text{converge}$$

Résultat:

$$\text{Fonction carrée} \quad \longleftrightarrow \quad \gamma\text{-radonification}$$

Calcul H^∞

Soit $\sigma(A) \in St_\omega$, $\alpha > \omega$, $\quad f \in H^\infty(\mathrm{St}_\alpha) \cap L^1(\partial \mathrm{St}_\alpha)$

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{St}_\nu} f(z)(z - A)^{-1}\, dz$$

Calcul H^∞

Soit $\sigma(A) \in St_\omega$, $\alpha > \omega$, $\quad f \in H^\infty(\mathrm{St}_\alpha) \cap L^1(\partial \mathrm{St}_\alpha)$

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{St}_\nu} f(z)(z - A)^{-1}\, dz$$

Le calcul est appelé <u>borné</u> si

$$\|f(A)x\| \quad \leq \quad C\|f\|_\infty \|x\|$$

Calcul H^∞

Soit $\sigma(A) \in St_\omega$, $\alpha > \omega$, $\quad f \in H^\infty(\mathrm{St}_\alpha) \cap L^1(\partial \mathrm{St}_\alpha)$

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{St}_\nu} f(z)(z - A)^{-1} \, dz$$

Le calcul est appelé borné si

$$\|f(A)x\| \quad \leq \quad C\|f\|_\infty \|x\|$$

Théorème (Kalton, Weis)

Soit X un espace de Banach de cotype fini. Alors A a un calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné si et seulement si $\varphi(t + A)x \in \gamma(L^2(\mathbb{R}); X)$ pour un (tout) $0 \neq \varphi \in H_0^\infty$

Calcul H^∞

Soit $\sigma(A) \in St_\omega$, $\alpha > \omega$, $\quad f \in H^\infty(\mathrm{St}_\alpha) \cap L^1(\partial \mathrm{St}_\alpha)$

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{St}_\nu} f(z)(z - A)^{-1}\, dz$$

Le calcul est appelé borné si

$$\|f(A)x\| \quad \leq \quad C\|f\|_\infty \|x\|$$

Théorème (Kalton, Weis)

Soit X un espace de Banach de cotype fini. Alors A a un calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné si et seulement si $\varphi(t + A)x \in \gamma(L^2(\mathbb{R}); X)$ pour un (tout) $0 \neq \varphi \in H_0^\infty$

Définition

$M \subseteq H$ (Hilbert) est appelé ℓ_1–borné s'il existe une base de Riesz $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ telle que

$$\sup_{x \in M} \sum_{\alpha \in I} \big| [x, e_\alpha]_H \big| < \infty. \tag{1}$$

Exemples: l'image d'une boule est ℓ_1–borné pour

- tout opérateur Hilbert-Schmidt (p.ex. l'inclusion $W^{1,2}(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$)
- l'inclusion $W^{2,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$

un opérateur associé au calcul fonctionnel

Soit $f \in H^\infty(\Omega, H)$ à image ℓ_1-bornée.

$$T_{f,x} : H \to X \qquad h \mapsto [f(\cdot), h]_H\,(A)x$$

Exemples: l'image d'une boule est ℓ_1–borné pour

- tout opérateur Hilbert-Schmidt (p.ex. l'inclusion $W^{1,2}(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$)
- l'inclusion $W^{2,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$

un opérateur associé au calcul fonctionnel

Soit $f \in H^\infty(\Omega, H)$ à image ℓ_1-bornée.

$$T_{f,x} : H \to X \qquad h \mapsto [f(\cdot), h]_H\,(A)x$$

Proposition (avec Haase)

X Banach de cotype fini. Si $f : \Omega \to H$ est à image ℓ_1-borné, A calcul $H^\infty(\Omega)$ borné alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H;X)$–radonifiant et $\|T_{f,x}\| \leq C\|f\|_\infty\|x\|$.

Exemples: l'image d'une boule est ℓ_1–borné pour

• tout opérateur Hilbert-Schmidt (p.ex. l'inclusion $W^{1,2}(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$)
• l'inclusion $W^{2,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$

un opérateur associé au calcul fonctionnel

Soit $f \in H^\infty(\Omega, H)$ à image ℓ_1-bornée.

$$T_{f,x} : H \to X \qquad h \mapsto [f(\cdot), h]_H \,(A)x$$

Proposition (avec Haase)

X Banach de cotype fini. Si $f : \Omega \to H$ est à image ℓ_1-borné, A calcul $H^\infty(\Omega)$ borné alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H;X)$–radonifiant et $\|T_{f,x}\| \le C\|f\|_\infty \|x\|$.

Corollaire 1

Appliqué à $H = L^2(\mathbb{R})$, $f(t,z) = \varphi(t+z)$, on obtient le résultat de Kalton-Weis.

Exemples: l'image d'une boule est ℓ_1–borné pour

- tout opérateur Hilbert-Schmidt (p.ex. l'inclusion $W^{1,2}(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$)
- l'inclusion $W^{2,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$

un opérateur associé au calcul fonctionnel

Soit $f \in H^\infty(\Omega, H)$ à image ℓ_1-bornée.

$$T_{f,x} : H \to X \qquad h \mapsto [f(\cdot), h]_H\,(A)x$$

Proposition (avec Haase)

X Banach de cotype fini. Si $f : \Omega \to H$ est à image ℓ_1-borné, A calcul $H^\infty(\Omega)$ borné alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H; X)$–radonifiant et $\|T_{f,x}\| \le C\|f\|_\infty\|x\|$.

Corollaire 1

Appliqué à $H = L^2(\mathbb{R})$, $f(t,z) = \varphi(t+z)$, on obtient le résultat de Kalton-Weis.

Corollaire 2 (Kalton-Weis)

X Banach de cotype fini, $U(t) = e^{-itA}$ un groupe et A a un calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné. Alors

$$\forall x \in X : \qquad \cosh(\alpha t)^{-1} U(t)x \in \gamma(\mathbb{R}; X) \qquad (\alpha > \omega(A))$$

Exemples: l'image d'une boule est ℓ_1–borné pour

• tout opérateur Hilbert-Schmidt (p.ex. l'inclusion $W^{1,2}(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$)
• l'inclusion $W^{2,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$

un opérateur associé au calcul fonctionnel

Soit $f \in H^\infty(\Omega, H)$ à image ℓ_1-bornée.

$$T_{f,x} : H \to X \qquad h \mapsto [f(\cdot), h]_H\,(A)x$$

Proposition (avec Haase)

X Banach de cotype fini. Si $f : \Omega \to H$ est à image ℓ_1-borné, A calcul $H^\infty(\Omega)$ borné alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H; X)$–radonifiant et $\|T_{f,x}\| \le C\|f\|_\infty \|x\|$.

Corollaire 1

Appliqué à $H = L^2(\mathbb{R})$, $f(t,z) = \varphi(t+z)$, on obtient le résultat de Kalton-Weis.

Corollaire 2 (Kalton-Weis)

X Banach de cotype fini, $U(t) = e^{-itA}$ un groupe et A a un calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné. Alors

$$\forall x \in X : \qquad \cosh(\alpha t)^{-1} U(t)x \in \gamma(\mathbb{R}; X) \qquad (\alpha > \omega(A))$$

Théorème (avec Haase)

X Banach de cotype fini, A calcul $H^\infty(\Omega)$ borné et $f \in H^\infty(\Omega; H)$ à image ℓ_1-borné. Alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H; X)$–radonifiant.

Théorème (avec Haase)

X Banach de cotype fini, A calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné et $f \in H^\infty(\mathrm{St}_\omega; H)$ ~~à image ℓ_1-borné~~. Alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H; X)$–radonifiant.

Théorème (avec Haase)

X Banach de cotype fini, A calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné et $f \in H^\infty(\mathrm{St}_\omega; H)$ ~~à image ℓ_1-borné~~. Alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H; X)$–radonifiant.

Exemple: f telle que (1) $f(t, \cdot) \in H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ pour tout t et (2) $f(\cdot, z) \in L^2(I)$ pour tout z. Alors $f(t, A)x \in \gamma(I, X)$ pour tout x.

Théorème (avec Haase)

X Banach de cotype fini, A calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné et $f \in H^\infty(\mathrm{St}_\omega; H)$ ~~à image ℓ_1-borné~~. Alors $T_{f,x}$ est $\gamma(H;X)$–radonifiant.

Exemple: f telle que (1) $f(t,\cdot) \in H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ pour tout t et (2) $f(\cdot, z) \in L^2(I)$ pour tout z. Alors $f(t,A)x \in \gamma(I,X)$ pour tout x.

Corollaire: calcul fonctionnel 'Hörmander'

$0 \leq \eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}(\eta) \subset [-1,1]$, $\eta_t(x) := \eta(x-t)$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_k = 1$.

Définition: $f \in \mathcal{H}_2^\alpha(\mathbb{R})$ si $\|f\|_{\mathcal{H}_2^\alpha} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|\eta_t f\right\|_{H^{\alpha,2}(\mathbb{R})} < \infty$.

Théorème: (Kriegler) X Banach de cotype fini et U_t a groupe tel que B a un calcul $H^\infty(\mathrm{St}_\omega)$ borné et si pour un $\alpha > 1/2$,

$$\langle s\rangle^{-\alpha}\, U(s)x \in \gamma(\mathbb{R}; X)$$

alors

$$\|f(B)x\| \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}_2^\beta} \qquad \text{pour} \quad \beta > 1/2 + \alpha.$$

Deuxième partie: contrôle de systèmes & applications

Système linéaire

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) & = & Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) & = & Cx(t) \end{cases}$$

Hypothèses

- X, Y, U Banach
- $-A \sim T_t$ semigroupe fortement continu
- $C : [D(A)] \to Y$ et $B : U \to X$ continues.

Système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) + Ax(t) & = & Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{array} \right. \qquad x(0) = x_0$$

Hypothèses

- X, Y, U Banach
- $-A \sim T_t$ semigroupe fortement continu
- $C : [D(A)] \to Y$ et $B : U \to X$ continues.

Question:

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$ espaces de fonctions à valeurs dans X, Y, U;

$$\text{dépendance continue} \qquad \big(x_0, u(t)\big) \mapsto \big(x(t), y(t)\big) \quad ?$$

Système linéaire

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) &= Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

Hypothèses

- X, Y, U Banach
- $-A \sim T_t$ semigroupe fortement continu
- $C : [D(A)] \to Y$ et $B : U \to X$ continues.

Question:

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$ espaces de fonctions à valeurs dans X, Y, U;

$$\text{dépendance continue} \qquad \big(x_0, u(t)\big) \mapsto \big(x(t), y(t)\big) \quad ?$$

Un choix habituel

$$\mathcal{X} = L^2(I; X), \qquad \mathcal{Y} = L^2(I; Y), \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = L^2(I; U).$$

Système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) + Ax(t) & = & Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) \end{array}\right. \qquad x(0) = x_0$$

Hypothèses

- X, Y, U Banach
- $-A \sim T_t$ semigroupe fortement continu
- $C : [D(A)] \to Y$ et $B : U \to X$ continues.

Question:

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$ espaces de fonctions à valeurs dans X, Y, U;

$$\text{dépendance continue} \qquad \big(x_0, u(t)\big) \mapsto \big(x(t), y(t)\big) \quad ?$$

Un choix habituel

$$\mathcal{X} = L^2(I; X), \qquad \mathcal{Y} = L^2(I; Y), \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = L^2(I; U).$$

Définition:

C est L^2-admissible si $\|CT(\cdot)x\|_{L^2(\mathbb{R}_+;Y)} \leq M\|x\|$.

Condition nécessaire

$$\|C(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\sqrt{2Re(\lambda)}} \qquad \text{(W)}$$

Définition:

C est L^2-admissible si $\|CT(\cdot)x\|_{L^2(\mathbb{R}_+;Y)} \leq M\|x\|$.

Condition nécessaire

$$\|C(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\sqrt{2Re(\lambda)}} \tag{W}$$

Conjecture de Weiss (1991)

En espaces de Hilbert, (W) implique L^2-admissibilité

Définition:

C est L^2-admissible si $\|CT(\cdot)x\|_{L^2(\mathbb{R}_+;Y)} \leq M\|x\|$.

Condition nécessaire

$$\|C(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\sqrt{2Re(\lambda)}} \tag{W}$$

Conjecture de Weiss (1991)

En espaces de Hilbert, (W) implique L^2-admissibilité

Résultats (partiels)

Conjecture fausse (Jacob, Zwart), mais l'implication conjecturé est vraie pour des

a) semigroupes normaux (Weiss)
b) semigroupes de contractions analytiques Hilbert (Jacob, Partington)
c) semigroupes analytiques si $A^{1/2}$ est admissible (Le Merdy),

Définition:

C est L^2-admissible si $\|CT(\cdot)x\|_{L^2(\mathbb{R}_+;Y)} \leq M\|x\|$.

Condition nécessaire

$$\|C(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\sqrt{2Re(\lambda)}} \tag{W}$$

Conjecture de Weiss (1991)

En espaces de Hilbert, (W) implique L^2-admissibilité

Résultats (partiels)

Conjecture fausse (Jacob, Zwart), mais l'implication conjecturé est vraie pour des

a) semigroupes normaux (Weiss)
b) semigroupes de contractions analytiques Hilbert (Jacob, Partington)
c) semigroupes analytiques si $A^{1/2}$ est admissible (Le Merdy),

La condition de Le Merdy

$A^{1/2}$ est L^2–admissible si $\displaystyle\int_0^\infty \| A^{1/2} T(t) x \|^2 \, dt \leq M^2 \|x\|^2.$

La condition de Le Merdy

$A^{1/2}$ est L^2–admissible si $$\int_0^\infty \|t^{1/2} A^{1/2} T(t)x\|^2 \, \frac{dt}{t} \leq M^2 \|x\|^2.$$

La condition de Le Merdy

$$A^{1/2} \text{ est } L^2\text{–admissible si} \qquad \int_0^\infty \|\underbrace{t^{1/2}A^{1/2}T(t)x}_{=\varphi(tA)x}\|^2\,\frac{dt}{t} \le M^2\|x\|^2.$$

est une condition de fonctions carrées.

La condition de Le Merdy

$A^{1/2}$ est L^2–admissible si $$\int_0^\infty \|\underbrace{t^{1/2}A^{1/2}T(t)x}_{=\varphi(tA)x}\|^2 \frac{dt}{t} \leq M^2\|x\|^2.$$

est une condition de fonctions carrées.

Théorème

$T(t)$ semigroupe analytique, alors (W) ssi $CT(t)x \in L^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; Y)$.

De plus, pour $q < \infty$, $\quad CT(t)x \notin L^{2,q}(0, \varepsilon; Y)$ en général.

La condition de Le Merdy

$A^{1/2}$ est L^2–admissible si $\quad \displaystyle\int_0^\infty \|\underbrace{t^{1/2}A^{1/2}T(t)x}_{=\varphi(tA)x}\|^2 \frac{dt}{t} \le M^2\|x\|^2.$

est une condition de fonctions carrées.

Théorème

$T(t)$ semigroupe analytique, alors (W) ssi $CT(t)x \in L^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; Y)$.

De plus, pour $q < \infty$, $\quad CT(t)x \notin L^{2,q}(0,\varepsilon; Y)$ en général.

Contreexemple

Sur $H = L^2(-\pi,\pi)$ on construit un semigroupe analytique, diagonal sur une base conditionnelle ; $C : H \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle et $x \in H$ est explicite.

Définition

C est L^p_α-admissible si $\int_0^\infty \|s^\alpha CT(s)x\|^p\, dt \le M\|x\|^p$.

B est L^p_α-admissible si $\sup_t \left\| \int_0^t T(t-s)Bu(s)\, ds \right\| \le M\|s^\alpha u(s)\|_{L^p}$.

Définition

A satisfait des estimations L^p_* si

$$\int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|^p \frac{dt}{t} \lesssim \|x\|^p$$

Définition

C est L^p_α-admissible si $\int_0^\infty \|s^\alpha CT(s)x\|^p\,dt \le M\|x\|^p$.

B est L^p_α-admissible si $\sup_t \left\| \int_0^t T(t-s)Bu(s)\,ds \right\| \le M\|s^\alpha u(s)\|_{L^p}$.

Définition

A satisfait des estimations L^p_* si

$$\int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|^p \frac{dt}{t} \lesssim \|x\|^p$$

Théorème ($p = 2$ avec Le Merdy, cas général avec Kunstmann)

$T(t)$ semigroupe analytique, $p \in [1,\infty]$, $\alpha \in (-1/p, 1/p')$. Alors

a) Si A satisfait des estimations L^p_*, C est L^p_α–admissible si et seulement si

$$\|C(\lambda + A)^{-1}\| \lesssim M\lambda^{\alpha - 1/p'}$$

b) Si $\alpha > 0$, B est L^p_α–admissible si et seulement si

$$\|(\lambda + A)^{-1}B\| \lesssim M\lambda^{-\alpha - 1/p}$$

Définition

C est L^p_α-admissible si $\int_0^\infty \|s^\alpha CT(s)x\|^p\,dt \le M\|x\|^p$.

B est L^p_α-admissible si $\sup_t \left\| \int_0^t T(t-s)Bu(s)\,ds \right\| \le M\|s^\alpha u(s)\|_{L^p}$.

Définition

A satisfait des estimations L^p_* si

$$\int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|^p \tfrac{dt}{t} \lesssim \|x\|^p$$

Théorème ($p = 2$ avec Le Merdy, cas général avec Kunstmann)

$T(t)$ semigroupe analytique, $p \in [1, \infty]$, $\alpha \in (-{}^1\!/_p, {}^1\!/_{p'})$. Alors

a) Si A satisfait des estimations L^p_*, C est L^p_α–admissible si et seulement si

$$\|C(\lambda + A)^{-1}\| \lesssim M\lambda^{\alpha - {}^1\!/_{p'}}$$

b) Si $\alpha > 0$, B est L^p_α–admissible si et seulement si

$$\|(\lambda + A)^{-1}B\| \lesssim M\lambda^{-\alpha - {}^1\!/_p}$$

Équations Navier-Stokes (fluide incompressible)

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p & = & f, \quad (t > 0) \\ \nabla \cdot u & = & 0 \\ u(0, \cdot) & = & v_0 \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0. \end{array}\right.$$

Équations Navier-Stokes (fluide incompressible)

$$\begin{cases} \mathbb{P}u_t - \mathbb{P}\Delta u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla)u & = \mathbb{P}f, \quad (t > 0) \\ \nabla \cdot u & = 0 \\ u(0, \cdot) & = v_0 \\ u|_{\partial\Omega} & = 0. \end{cases}$$

Équations Navier-Stokes (fluide incompressible)

$$\begin{cases} \mathbb{P}u_t - \mathbb{P}\Delta u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla)u & = \mathbb{P}f, \quad (t > 0) \\ \nabla \cdot u & = 0 \\ u(0, \cdot) & = v_0 \\ u|_{\partial\Omega} & = 0. \end{cases}$$

Système linéaire avec feedback non-linéaire

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) & = Bu(t), \\ x(0) & = x_0 \\ y(t) & = Cx(t) \\ u(t) & = F(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Équations Navier-Stokes (fluide incompressible)

$$\begin{cases} \mathbb{P}u_t - \mathbb{P}\Delta u + \mathbb{P}(u\cdot\nabla)u & = \mathbb{P}f, \quad (t>0) \\ \nabla\cdot u & = 0 \\ u(0,\cdot) & = v_0 \\ u\big|_{\partial\Omega} & = 0. \end{cases}$$

Système linéaire avec feedback non-linéaire

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) & = Bu(t), & B = \mathrm{Id} \\ x(0) & = x_0 & \\ y(t) & = Cx(t) & C = \mathrm{Id} \\ u(t) & = F(x(t), y(t)) & F(u,v) = \mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes v) \end{cases}$$

Équations Navier-Stokes (fluide incompressible)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}u_t - \mathbb{P}\Delta u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla)u & = & \mathbb{P}f, \quad (t > 0) \\ \nabla \cdot u & = & 0 \\ u(0, \cdot) & = & v_0 \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0. \end{array}\right.$$

Système linéaire avec feedback non-linéaire

$$\left\{\begin{array}{lll} x'(t) + Ax(t) & = Bu(t), & B = \mathrm{Id} \\ x(0) & = x_0 & \\ y(t) & = Cx(t) & C = \mathrm{Id} \\ u(t) & = F(x(t), y(t)) & F(u, v) = \mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes v) \end{array}\right.$$

Solution 'mild'

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)BF(Cx(s), Cx(s))\, ds.$$

Théorème (avec Kunstmann)

X Banach, $(T(t))_{t\geq 0}$ semigroupe analytique. Soit $\tau \in (0,\infty]$ et $p \in (2,\infty]$, et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha + 1/p \in (0, 1/2)$. Supposons $F : Y \times Y \to U$ et

[A1] C est L^p_α-admissible

[A2] B est $L^{p/2}_{2\alpha}$-admissible

[A3] L'opérateur $(CT_{-1}(\cdot)B)*$ est borné $L^{p/2}_{2\alpha}((0,\tau),U) \to L^p_\alpha((0,\tau),Y)$

Alors, le problème

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B\, F(Cx(s), Cx(s))\, ds.$$

admet une solution 'locale' unique x pour $x_0 \in D(A)$.
Si $\|CT(\cdot)x_0\|_{L^p_\alpha}$ est petit, la solution existe globalement.

idée de la preuve:

$$y(t) = CT(t)x_0 + \int_0^t CT(t-s)B\, F(y(s), y(s))\, ds.$$

Théorème (avec Kunstmann)

X Banach, $(T(t))_{t\geq 0}$ semigroupe analytique. Soit $\tau \in (0,\infty]$ et $p \in (2,\infty]$, et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha + 1/p \in (0, 1/2)$. Supposons $F : Y \times Y \to U$ et

[A1] C est L^p_α-admissible

[A2] B est $L^{p/2}_{2\alpha}$-admissible

[A3] L'opérateur $(CT_{-1}(\cdot)B)*$ est borné $L^{p/2}_{2\alpha}((0,\tau),U) \to L^p_\alpha((0,\tau),Y)$

Alors, le problème

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B\, F(Cx(s), Cx(s))\, ds.$$

admet une solution 'locale' unique x pour $x_0 \in D(A)$.
Si $\|CT(\cdot)x_0\|_{L^p_\alpha}$ est petit, la solution existe globalement.

idée de la preuve:

$$y(t) = CT(t)x_0 + \int_0^t CT(t-s)B\, F(y(s), y(s))\, ds.$$

Théorème (avec Kunstmann)

X Banach, $(T(t))_{t\geq 0}$ semigroupe analytique. Soit $\tau \in (0,\infty]$ et $p \in (2,\infty]$, et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha + 1/p \in (0, 1/2)$. Supposons $F : Y \times Y \to U$ et

[A1] C est L^p_α-admissible

[A2] B est $L^{p/2}_{2\alpha}$-admissible

[A3] L'opérateur $(CT_{-1}(\cdot)B)*$ est borné $L^{p/2}_{2\alpha}((0,\tau),U) \to L^p_\alpha((0,\tau),Y)$

Alors, le problème

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B\,F(Cx(s),Cx(s))\,ds.$$

admet une solution 'locale' unique x pour $x_0 \in D(A)$.
Si $\|CT(\cdot)x_0\|_{L^p_\alpha}$ est petit, la solution existe globalement.

idée de la preuve: itération point fixe dans $E = L^p(0,\tau;X)$.

$$y(t) = \underbrace{CT(t)x_0}_{=z} + \underbrace{\int_0^t CT(t-s)B\,F(y(s),y(s))\,ds.}_{=\mathbb{B}(y,y)}$$

Théorème (avec Kunstmann)

Soit $n \geq 2$, $q>n$, $p \in (2, \infty]$, $\alpha \geq 0$ et $\lambda \in (0, n/q)$ tel que $\alpha + 1/p = 1/2 - n/2q$. Alors pour toute configuration des espaces X, Y, U dans le tableau suivant, il existe des solutions mild $x \in C([0, \tau), X) \cap L^p_\alpha(0, \tau; Y)$ pour tout $x_0 \in D(A)$. Si la donnée initiale est suffisamment petite on a existence globale.

Esp. auxilliaire Y	Espace X	commentaire
$L^q(\mathbb{R}^n)$,	$\dot{B}^{-1+n/q}_{q,p}(\mathbb{R}^n)$	$p=\infty$, $n=3$ Cannone, $n>2$: Amann
$L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$	$\dot{B}^{-1+n/q}_{(q,\infty),p}(\mathbb{R}^n)$	$p=\infty$ due à Barraza
$\mathcal{M}^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	un espace d'interpolation.	améliore Kozono et Yamazaki
$\mathcal{C}^\varepsilon(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$	$B^{-2(\alpha+1/p)+\varepsilon}_{\infty,p}(\mathbb{R}^n)$ pour $\alpha > 0$	due a Sawada
$\dot{D}(A^{3/8})$ ou $L^4(\Omega)^3$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dom. arbitraire	un espace d'interpolation.	améliore Monniaux et Sohr

Théorème (Ho, Russell 1983)

$T(t) = (e^{-\lambda_n t})_n$ semigroupe diagonal sur ℓ_2. Alors un opérateur B de rang 1 est admissible ssi $\mu = \sum_n |b_n|^2 \delta_{\lambda_n}$ mesure de Carleson.

(idée principale)

$$\int_0^\infty T(t)Bu(t)\,dt = \left(b_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} u(t)\,dt\right) = (b_n \mathcal{L}(u)(\lambda_n)).$$

Théorème (Ho, Russell 1983)

$T(t) = (e^{-\lambda_n t})_n$ semigroupe diagonal sur ℓ_2. Alors un opérateur B de rang 1 est admissible ssi $\mu = \sum_n |b_n|^2 \delta_{\lambda_n}$ mesure de Carleson.

(idée principale)

$$\int_0^\infty T(t)Bu(t)\,dt = \left(b_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} u(t)\,dt\right) = \left(b_n \mathcal{L}(u)(\lambda_n)\right).$$

Le cas ℓ_p.

$$\int_0^t e^{-\lambda_n s} b_n u(t-s)\,ds = \frac{b_n}{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n} * u) \qquad \varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)} e^{-x}$$

Théorème (Ho, Russell 1983)

$T(t) = (e^{-\lambda_n t})_n$ semigroupe diagonal sur ℓ_2. Alors un opérateur B de rang 1 est admissible ssi $\mu = \sum_n |b_n|^2 \delta_{\lambda_n}$ mesure de Carleson.

(idée principale)

$$\int_0^\infty T(t)Bu(t)\,dt = \left(b_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} u(t)\,dt\right) = \left(b_n \mathcal{L}(u)(\lambda_n)\right).$$

Le cas ℓ_p.

$$\int_0^t e^{-\lambda_n s} b_n u(t-s)\,ds = \tfrac{b_n}{\lambda_n}\left(\varphi_{\lambda_n} * u\right) \qquad \varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)} e^{-x}$$

mesures de Carleson

$$\mu \quad \text{Carleson ssi} \quad H^q(\mathbb{R}_+^{n+1}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mu)$$

Théorème (Ho, Russell 1983)

$T(t) = (e^{-\lambda_n t})_n$ semigroupe diagonal sur ℓ_2. Alors un opérateur B de rang 1 est admissible ssi $\mu = \sum_n |b_n|^2 \delta_{\lambda_n}$ mesure de Carleson.

(idée principale)

$$\int_0^\infty T(t)Bu(t)\,dt = \left(b_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} u(t)\,dt\right) = \big(b_n \mathcal{L}(u)(\lambda_n)\big).$$

Le cas ℓ_p.

$$\int_0^t e^{-\lambda_n s} b_n u(t-s)\,ds = \tfrac{b_n}{\lambda_n}\big(\varphi_{\lambda_n} * u\big) \qquad \varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)} e^{-x}$$

mesures de Carleson

$$\mu \ \ \alpha\text{–Carleson ssi} \quad H^q(\mathbb{R}_+^{n+1}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mu)$$

Théorème (Ho, Russell 1983)

$T(t) = (e^{-\lambda_n t})_n$ semigroupe diagonal sur ℓ_2. Alors un opérateur B de rang 1 est admissible ssi $\mu = \sum_n |b_n|^2 \delta_{\lambda_n}$ mesure de Carleson.

(idée principale)

$$\int_0^\infty T(t)Bu(t)\,dt = \left(b_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} u(t)\,dt\right) = \big(b_n \mathcal{L}(u)(\lambda_n)\big).$$

Le cas ℓ_p.

$$\int_0^t e^{-\lambda_n s} b_n u(t-s)\,ds = \tfrac{b_n}{\lambda_n}\big(\varphi_{\lambda_n} * u\big) \qquad \varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)} e^{-x}$$

mesures de Carleson

$$\mu \quad \alpha\text{–Carleson ssi} \qquad H^{\alpha q}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mu)$$

Théorème (Ho, Russell 1983)

$T(t) = (e^{-\lambda_n t})_n$ semigroupe diagonal sur ℓ_2. Alors un opérateur B de rang 1 est admissible ssi $\mu = \sum_n |b_n|^2 \delta_{\lambda_n}$ mesure de Carleson.

(idée principale)

$$\int_0^\infty T(t)Bu(t)\,dt = \left(b_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t} u(t)\,dt\right) = \left(b_n \mathcal{L}(u)(\lambda_n)\right).$$

Le cas ℓ_p.

$$\int_0^t e^{-\lambda_n s} b_n u(t-s)\,ds = \tfrac{b_n}{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n} * u) \qquad \varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)} e^{-x}$$

mesures de Carleson

$$\mu \;\; \alpha\text{–Carleson ssi} \quad H^{\alpha q}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mu)$$

Théorème

Soit $p, q \in (1, \infty)$, $\alpha = p/q$, $T(t)$ diagonal et analytique sur ℓ_q. Alors B de rang 1 est admissible si $\nu = \sum_n |\frac{b_n}{\lambda_n}|^q \delta_{\lambda_n^{-1}}$ est α–Carleson.

Rappel: L^2-admissibilité

$$\int_0^{\infty} \|CT(t)x\|^2 \, dt \;\leq\; M_{\tau} \|x\|^2$$

observabilité exacte

$$m_\tau^2 \|x\|^2 \overset{?}{\leq} \int_0^\infty \|CT(t)x\|^2 \, dt$$

observabilité exacte

$$m_\tau^2 \|x\|^2 \overset{?}{\leq} \int_0^\infty \|CT(t)x\|^2 \, dt$$

Test de Hautus (proposé par Russell et Weiss 1994

$$m^2 \|x\|^2 \leq \frac{1}{2Re(z)} \|Cx\|^2 + \frac{M}{2Re(z)} \|(A+z)x\|^2$$

est une conditions nécessaire;

observabilité exacte

$$m_\tau^2 \|x\|^2 \overset{?}{\leq} \int_0^\infty \|CT(t)x\|^2 \, dt$$

Test de Hautus (proposé par Russell et Weiss 1994

$$m^2 \|x\|^2 \leq \frac{1}{2Re(z)} \|Cx\|^2 + \frac{M}{2Re(z)} \|(A+z)x\|^2$$

est une conditions nécessaire;

Le test est suffisant pour

- si A est borné et inversible, pour semigroupes diagonales et $\dim Y < \infty$
- des groupes $U(t)$ sur des espaces de Hilbert (sous cond. de croissance)

observabilité exacte

$$m_\tau^2\|x\|^2 \overset{?}{\leq} \int_0^\infty \|CT(t)x\|^2\,dt$$

Test de Hautus (proposé par Russell et Weiss 1994

$$m^2\|x\|^2 \leq \frac{1}{2Re(z)}\|Cx\|^2 + \frac{M}{2Re(z)}\|(A+z)x\|^2$$

est une conditions nécessaire;

Le test est suffisant pour

- si A est borné et inversible, pour semigroupes diagonales et $\dim Y < \infty$
- des groupes $U(t)$ sur des espaces de Hilbert (sous cond. de croissance)

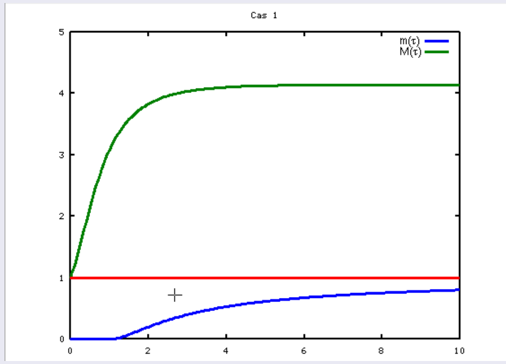
Test de Hautus 'vectoriel'

Proposition: C exactement observable ssi pour tout groupe $U(t)$

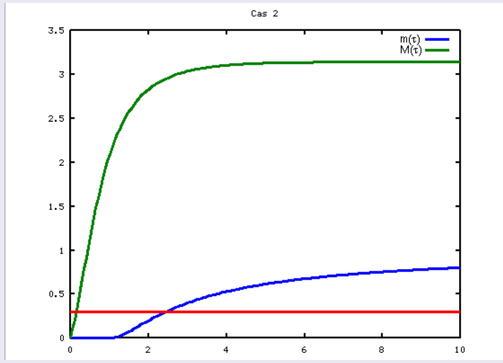
$$m^2\|x\|^2 \leq \int_0^\tau \|CU(t)x\|^2\,dt + M^2\Big(\int_0^\tau \|(A-B)U(s)x\|\,ds\Big)^2$$

Comportement de m_τ et M_τ

Cas 1:



Cas 2:

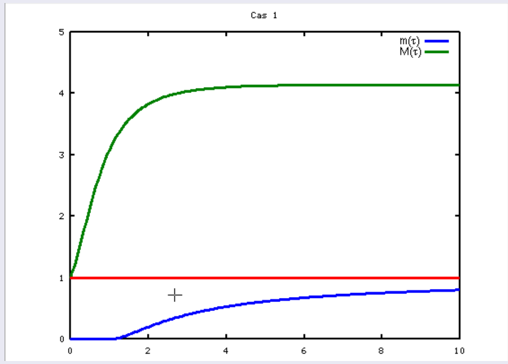


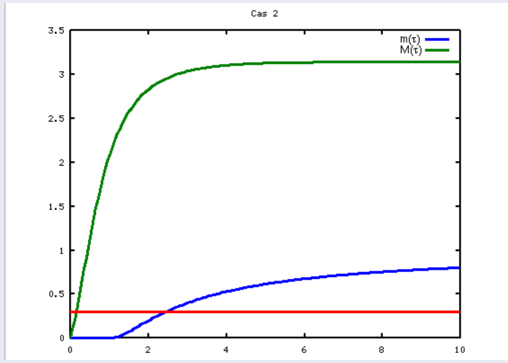
Conséquences du cas 2:

$T(t)$ admet inverse à gauche, (Liu,Xu,Yung)

De plus $Re(\partial\sigma(A))$ est borné (avec Ouhabaz).

Comportement de m_T et M_T

Cas 1: 

Cas 2: 

Conséquences du cas 2:

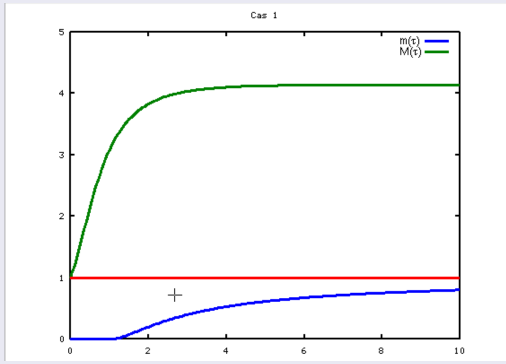
$T(t)$ admet inverse à gauche, (Liu,Xu,Yung)
De plus $Re(\partial\sigma(A))$ est borné (avec Ouhabaz).

Théorème (avec Ouhabaz)

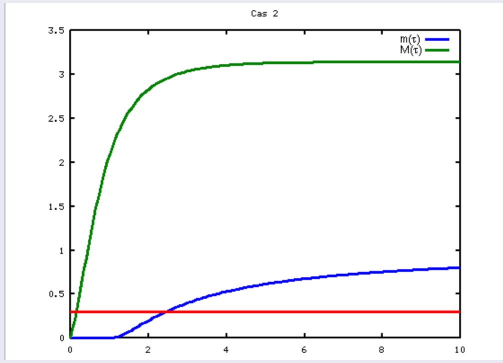
Soit $T(\cdot)$ semigroupe de contractions sur un Hilbert H et C admissible tel que $\|CA^{-1/2}x\| \geq \delta\|x\|$, alors C est exactement observable.

Comportement de m_T et M_T

Cas 1:



Cas 2:



Conséquences du cas 2:

$T(t)$ admet inverse à gauche, (Liu,Xu,Yung)
De plus $Re(\partial\sigma(A))$ est borné (avec Ouhabaz).

Théorème (avec Ouhabaz)

Soit $T(\cdot)$ semigroupe de contractions sur un Hilbert H et C admissible tel que $\|CA^{-1/2}x\| \geq \delta\|x\|$, alors C est exactement observable.

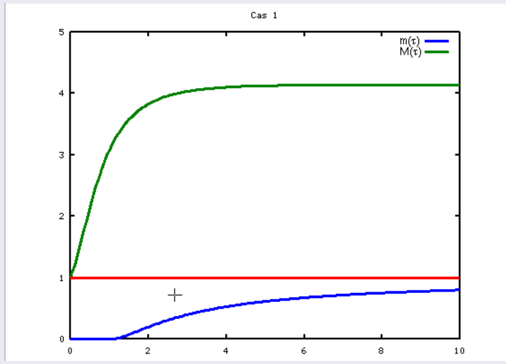
élément de la preuve:

Estimation de fonctions carrées inférieure

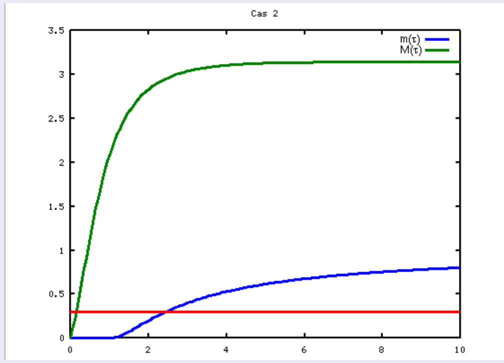
$$m\|x\|^2 \leq \int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} \quad \text{pour} \quad \varphi(z) = z^{-1/2}(e^{-2z} - e^{-z})$$

Comportement de m_τ et M_τ

Cas 1:



Cas 2:



Conséquences du cas 2:

$T(t)$ admet inverse à gauche, (Liu,Xu,Yung)
De plus $Re(\partial\sigma(A))$ est borné (avec Ouhabaz).

Théorème (avec Ouhabaz)

Soit $T(\cdot)$ semigroupe de contractions sur un Hilbert H et C admissible tel que $\|CA^{-1/2}x\| \geq \delta\|x\|$, alors C est exactement observable.

élément de la preuve:

Estimation de fonctions carrées inférieure

$$m\|x\|^2 \leq \int_0^\infty \|\varphi(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} \quad \text{pour} \quad \varphi(z) = z^{-1/2}(e^{-2z} - e^{-z})$$